

# 平面介质光波导和耦合模理论

---

# 目录

- 2.1 平面光波导的射线光学分析
- 2.2 平面光波导的波导方程分析
  - 2.2.1 TE模的场方程及传播模式
  - 2.2.2 TM模的场方程及传播模式
- 2.3 条形光波导的波导方程分析
  - 2.3.1  $E_{mn}^y$  模
  - 2.3.2  $E_{mn}^x$  模
- 2.4 耦合模理论
  - 2.4.1 模式耦合
  - 2.4.2 平面光波导的耦合模微扰理论
  - 2.4.3 导模之间的耦合
  - 2.4.4 导模与辐射模之间的耦合
  - 2.4.5 光波导的激励

## 第2章 平面介质光波导和耦合模理论

### \* 平板光波导（仅在 $x$ 方向具有折射率差）

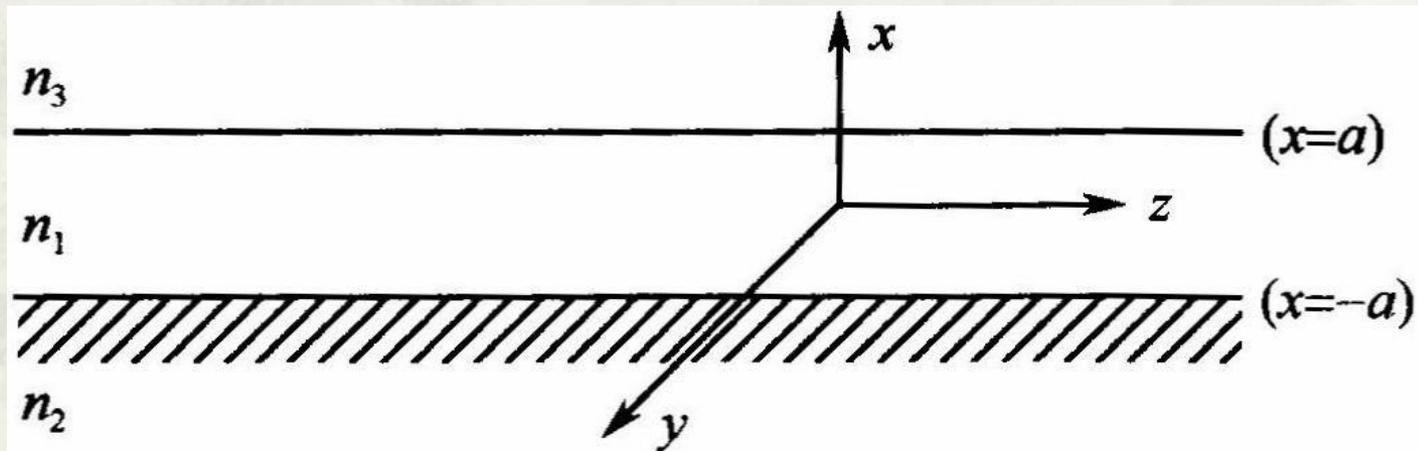
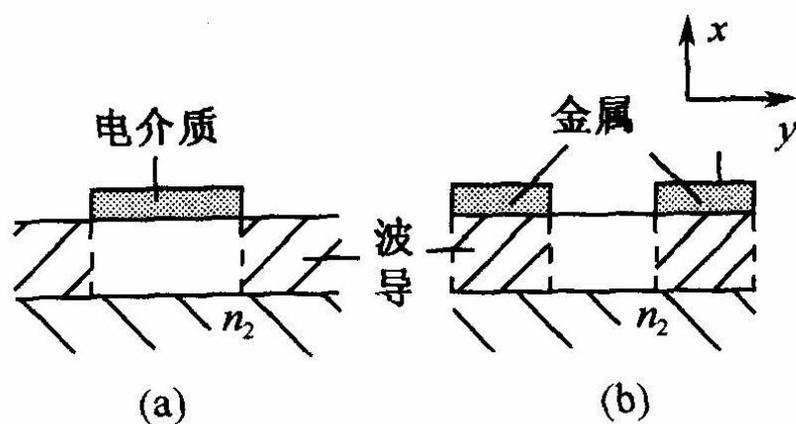


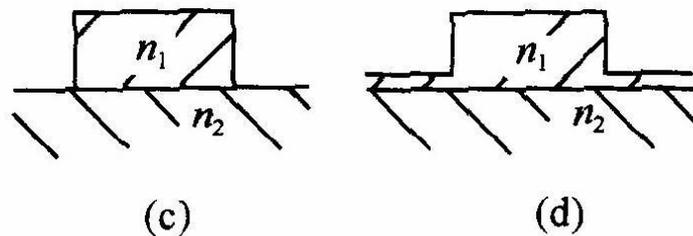
图 2.1 平板光波导的纵剖面结构

# \* 条形光波导

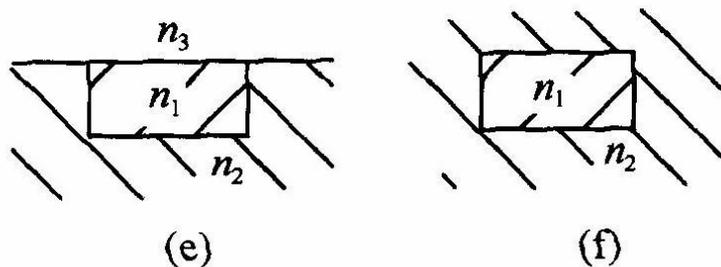
(在  $x$ 、 $y$  方向均具有折射率差)



加载型 Strip loaded waveguid

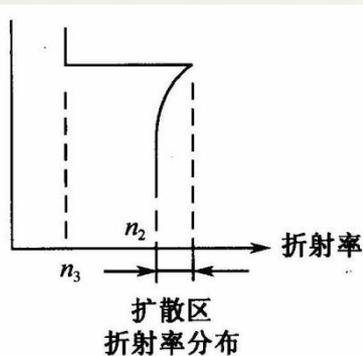


脊型 Ridge waveguid

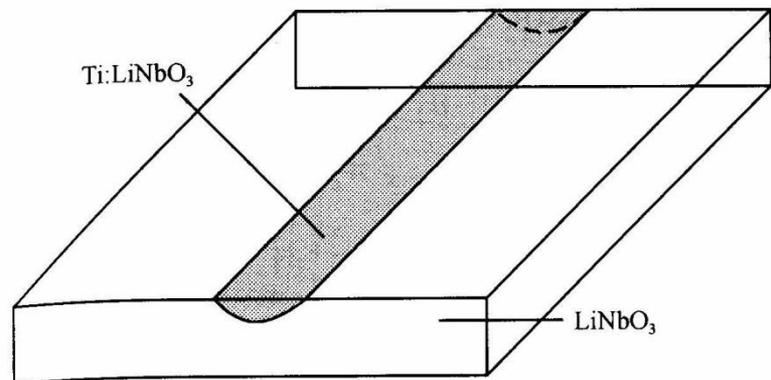


埋入型 Buried waveguid

图 2.2 几种常见的条形波导横截面图



(b) 扩散波导的折射率分布



(a) 扩散法制成的条形波导

图 2.3 Ti: LiNbO<sub>3</sub> 光波导

## 2.1 平面光波导的射线光学分析

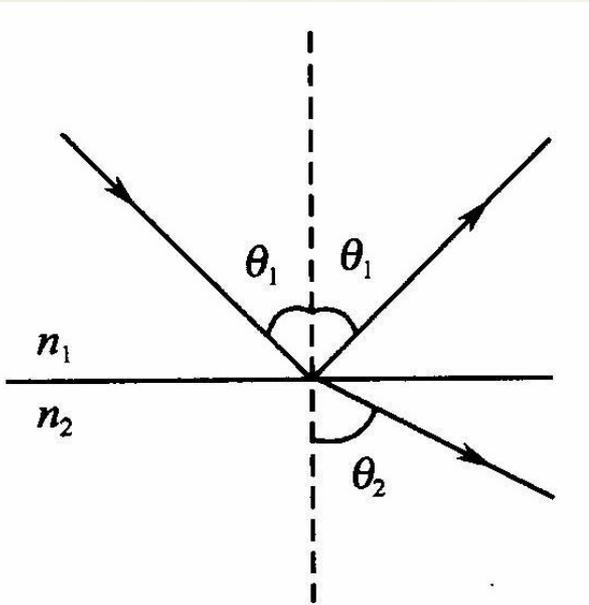


图 2.4 光线在界面的  
反射和折射

折射光的Snell定律

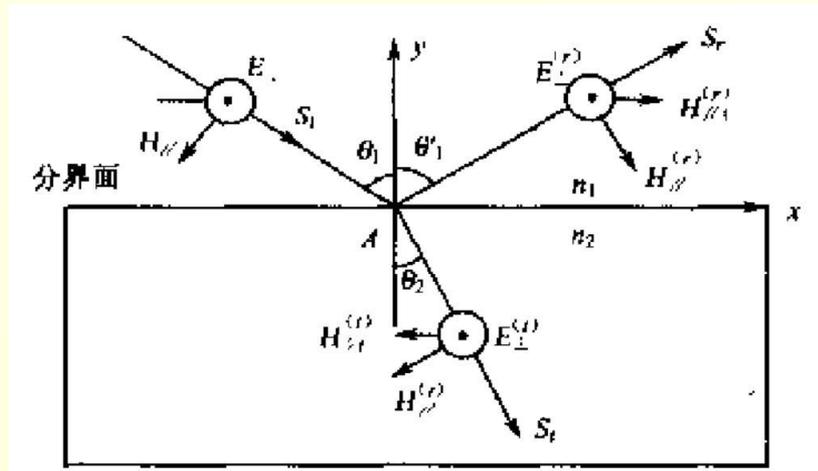
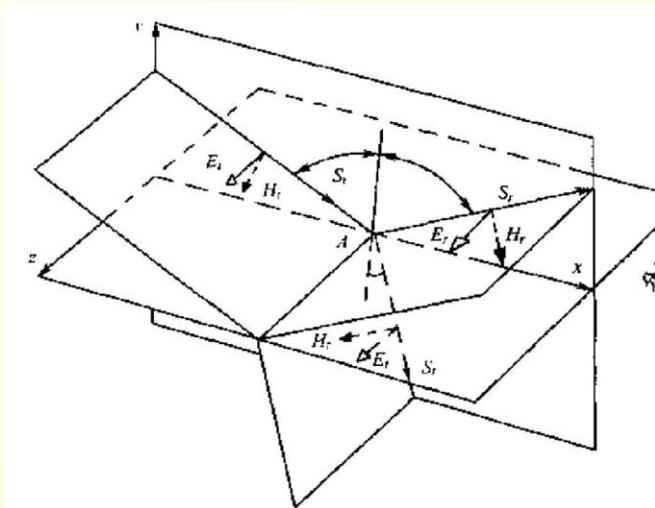
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad 2.1.1$$

光的全反射现象

$$\theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} \quad 2.1.4$$

$\theta_c$  ——全反射临界角

# 反射光的Fresnel定律



$$r_s = \frac{E_{o\perp}^r}{E_{o\perp}^i} = r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_1 \cos \theta_1 + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \quad 2.1.4$$

$$r_p = \frac{E_{o\parallel}^r}{E_{o\parallel}^i} = r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{n_2^2 \cos \theta_1 - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{n_2^2 \cos \theta_1 + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}} \quad 2.1.5$$

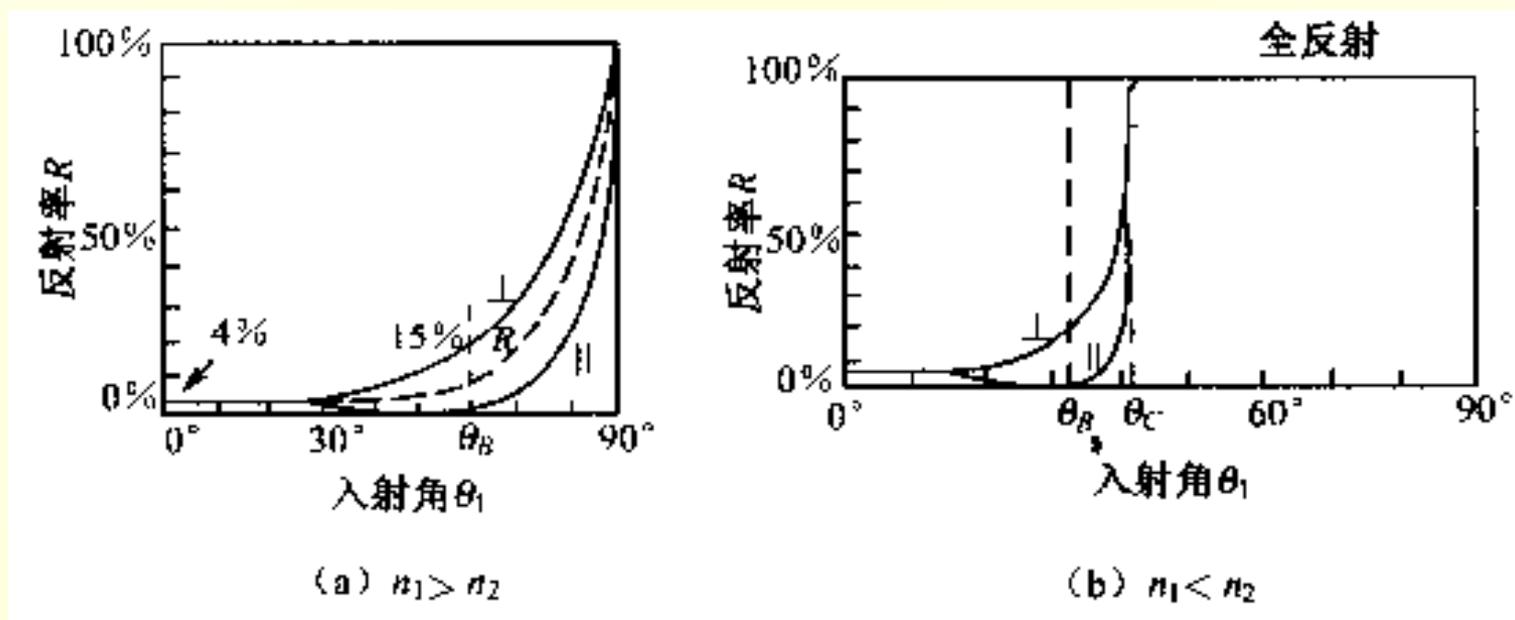
当  $\theta_1 < \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  时，振幅反射率均为实数，即：一部分反射，一部分折射

当  $\theta_1 = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  时， $r_{s,p} = 1$ ，即：对s、p型偏振光，只存在反射波，不存在透射波

$$R = \frac{I^r}{I^i} = \frac{I_{//}^r + I_{\perp}^r}{I^i} = \frac{I_{//}^r}{I_{//}^i} \cos^2 \alpha + \frac{I_{\perp}^r}{I_{\perp}^i} \sin^2 \alpha = R_{//} \cos^2 \alpha + R_{\perp} \sin^2 \alpha$$

$$T = \frac{I^t}{I^i} = \frac{I_{//}^t + I_{\perp}^t}{I^i} = \frac{I_{//}^t}{I_{//}^i} \cos^2 \alpha + \frac{I_{\perp}^t}{I_{\perp}^i} \sin^2 \alpha = T_{//} \cos^2 \alpha + T_{\perp} \sin^2 \alpha$$

入射波为线偏振光， $\alpha$ ---入射光电场矢量偏振面与入射面的夹角



光从空气入射到到普通玻璃时反射率 $R$ 随入射角的变化曲线  
**反射率与1入射光的偏振态，2入射角，3折射率差有关**

对于无损耗介质有

$$R + T = 1$$

$$R_{//} + T_{//} = 1$$

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1$$

垂直入射时：

$$R_{\perp} = R_{//} = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

$$T_{\perp} = T_{//} = \frac{4n_2n_1}{(n_2 + n_1)^2}$$

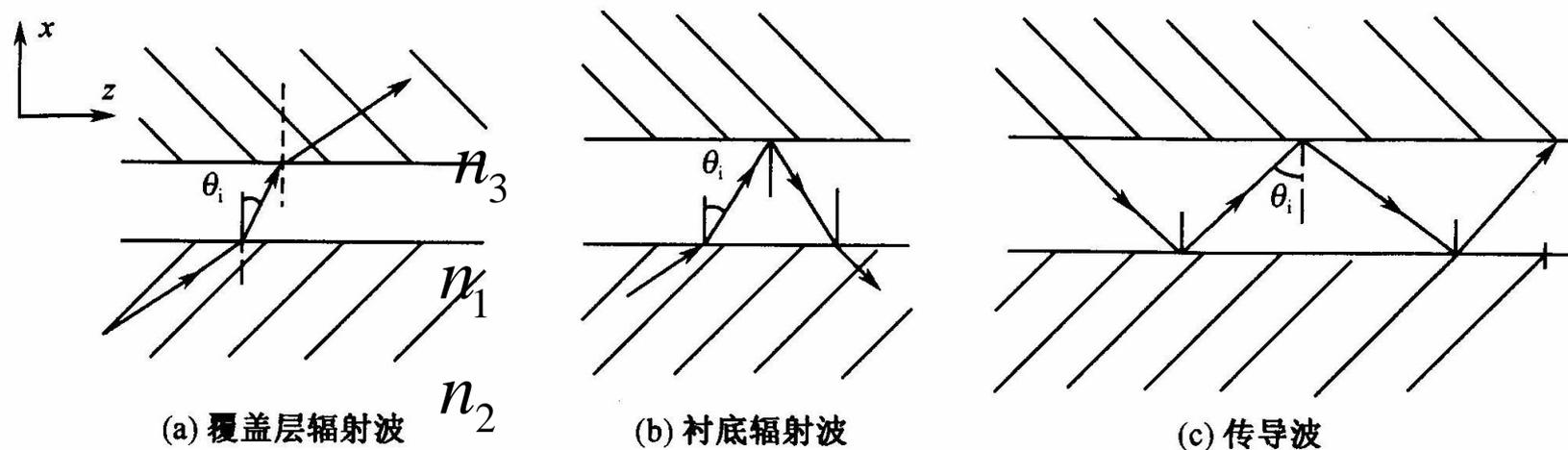


图 2.5 平板光波导可能存在的几种波

$$n_1 > n_2 \geq n_3$$

$n_2 > n_3$  ---非对称波导

非对称波导传导模条件为

$$\sin \theta_i > \sin \theta_{c12} = \frac{n_2}{n_1} \geq \sin \theta_{c13} = \frac{n_3}{n_1}$$

衬底辐射波条件

$$\sin \theta_{c12} = \frac{n_2}{n_1} > \sin \theta_i \geq \sin \theta_{c13} = \frac{n_3}{n_1}$$

覆盖层辐射波条件

$$\sin \theta_i < \sin \theta_{c13} = \frac{n_3}{n_1}$$

$n_2 = n_3$  ---对称波导

# 自由空间传输的平面波与波导中传播的平面波

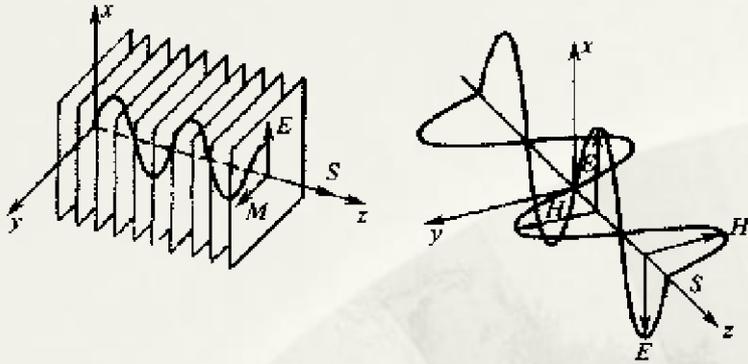
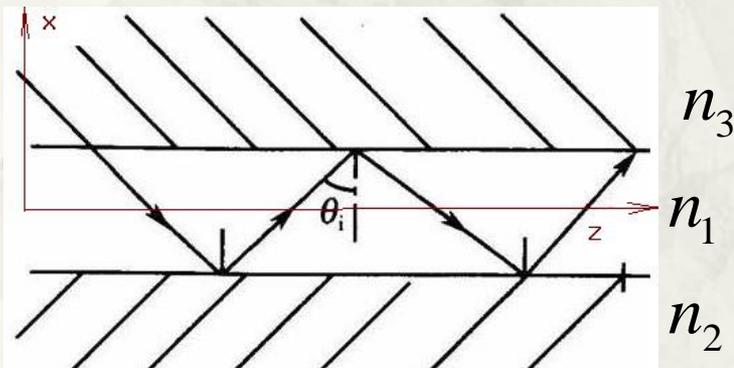


图 1-2-12 平面电磁波的图示

$$\left\{ \begin{aligned} E_z(z, t) &= E_0 \exp(j\omega t - jk_0 z) \\ k_0 &= 2\pi / \lambda_0 \end{aligned} \right.$$



定义：沿Z方向的传播常数 $\beta$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta = k_z &= k_1 \sin \theta_i \quad 2.1.6 \\ k_1 &= n_1 k_0 = 2\pi n_1 / \lambda_0 \end{aligned} \right.$$

在波导中传播的波为锯齿状，可分解为沿Z方向传播的行波和沿X方向传播的驻波

$k_1$ ---在折射率 $n_1$ 的自由空间沿Z方向传播的电磁波的波矢量（传播常数）

# 传导波条件

$$\beta = k_z = k_1 \sin \theta_i \longrightarrow \beta \leq k_1 = n_1 k_o = 2\pi n_1 / \lambda_o$$

$$\sin \theta_i > \sin \theta_{c12} = \frac{n_2}{n_1} \geq \sin \theta_{c13} = \frac{n_3}{n_1}$$

$$\frac{\beta}{k_1} = \sin \theta_i > \sin \theta_{c12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{k_2}{k_1}$$

$$k_2 < \beta \leq k_1$$

$$n_2 k_o < \beta \leq n_1 k_o$$

2.1.7

定义导波有效折射率  $n_{eff} = \beta / k_o$

$$n_2 < n_{eff} \leq n_1 \quad 2.1.9$$

## 导波截止条件

$$\beta = k_z = k_1 \sin \theta_i \longrightarrow \beta_{\max} = k_1 = n_1 k_0$$

在  $\beta > n_1 k_0$  区域不可能存在导波----导波截止区

仅在衬底出现辐射模式的条件为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta}{k_1} = \sin \theta_i \leq \sin \theta_{c12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{k_2}{k_1} \\ \frac{\beta}{k_1} = \sin \theta_i > \sin \theta_{c13} = \frac{n_3}{n_1} = \frac{k_3}{k_1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n_3 < n_{\text{eff}} \leq n_2 \\ 2.1.11 \end{aligned}$$

在衬底和覆盖层都出现辐射模式的条件为：

$$0 \leq n_{\text{eff}} < n_3$$

2.1.12

# 关于 $\beta$ 的讨论

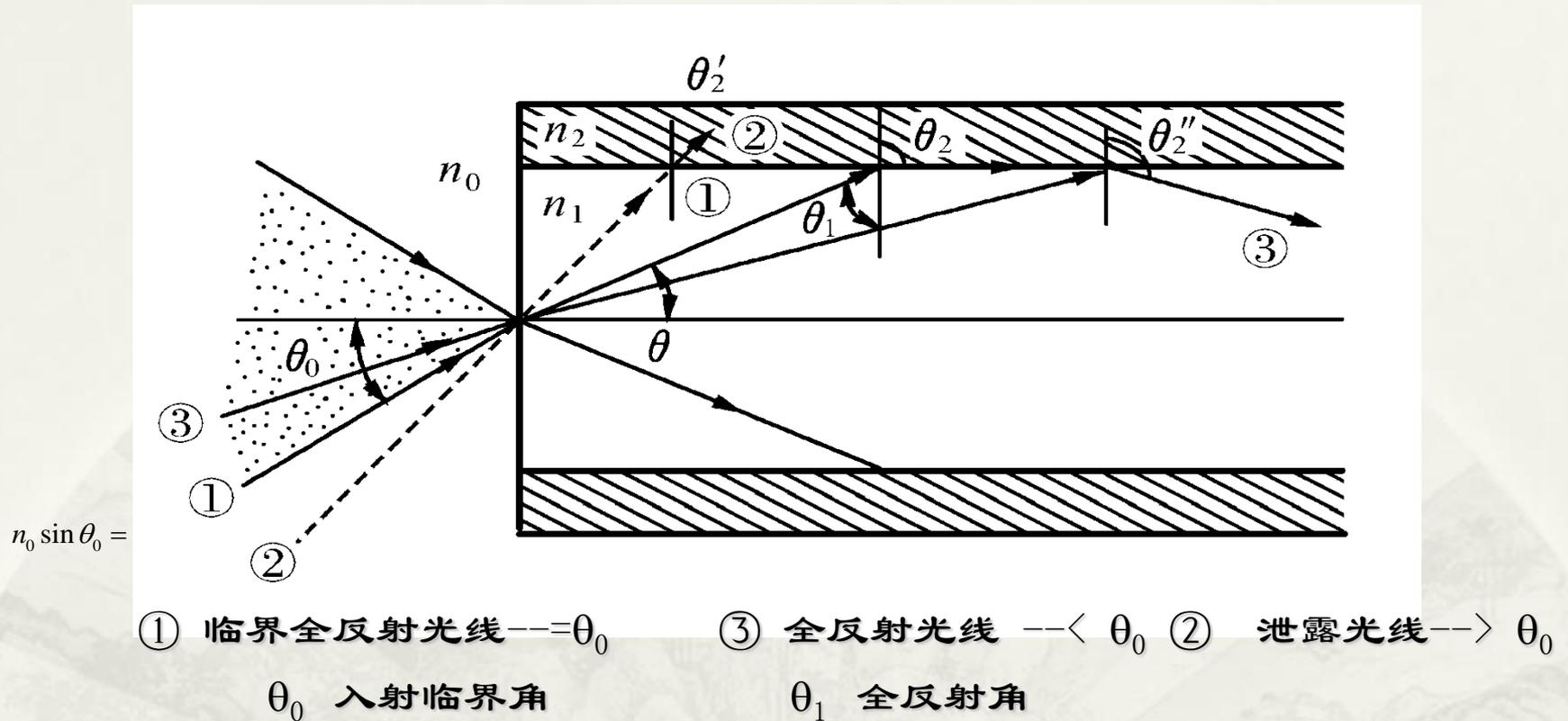
1.  $\beta$ 可能存在多个解，每个解对用于一个导波，称为一个本征模。波导中允许一组离散的本征模存在，用模数 $m$ 代表每个本征模， $m=0、1、2、3、\dots$ ， $m$ 较小的叫低阶模， $m$ 较大的叫高阶模
2. 波导中可能存在的 $m$ 数与波导厚度 $d$ 、折射率差 $\Delta$ 有关，它们越大，存在的模数数量越多； $\Delta$ 较小的称为弱波导
3. 截止波长：对应  $\beta_{\max} = k_0 - n_1 k_0 \sin \theta_1$  的波长为截止波长，对应的模式称为**主模**；比截止波长长的光波将就进入截止区不能传输；每个模式都有自己的截止波长。
4. 单模传输：仅能在波导中传输主模。其条件为：在波导中传输的光波波长比主模截止波长长，又比次阶模式的截止波长短

# 截止波长和单模条件讨论

---



# 数值孔径N. A和相对折射率差 $\Delta$



$$n_0 = 1, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \sin \theta_0 = n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

# N. A和 $\Delta$ 意义

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$$

光纤对光场的约束能力

$$NA = n_1 \sqrt{2\Delta}$$

光纤端面最大接收角的正弦

# 平面光波导的模式及传播常数小结

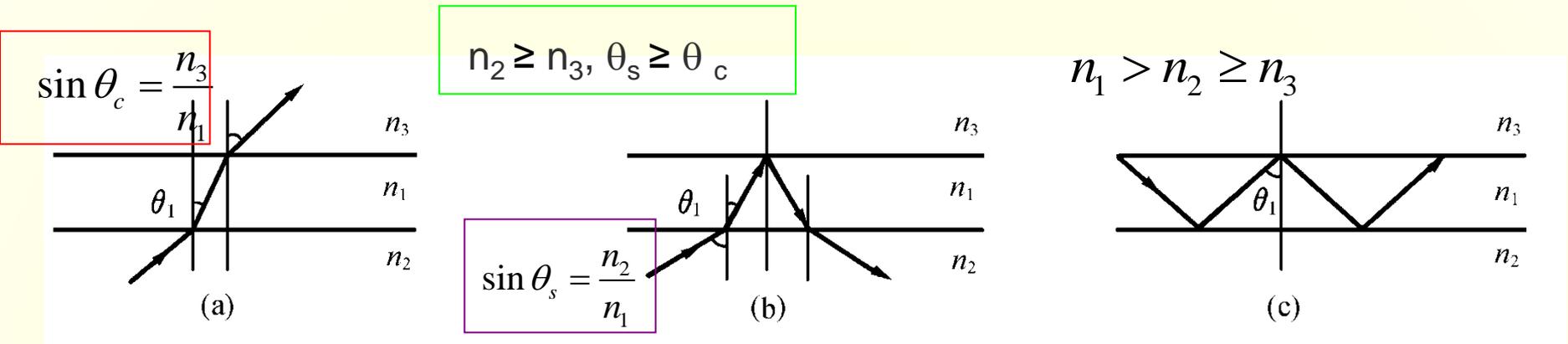
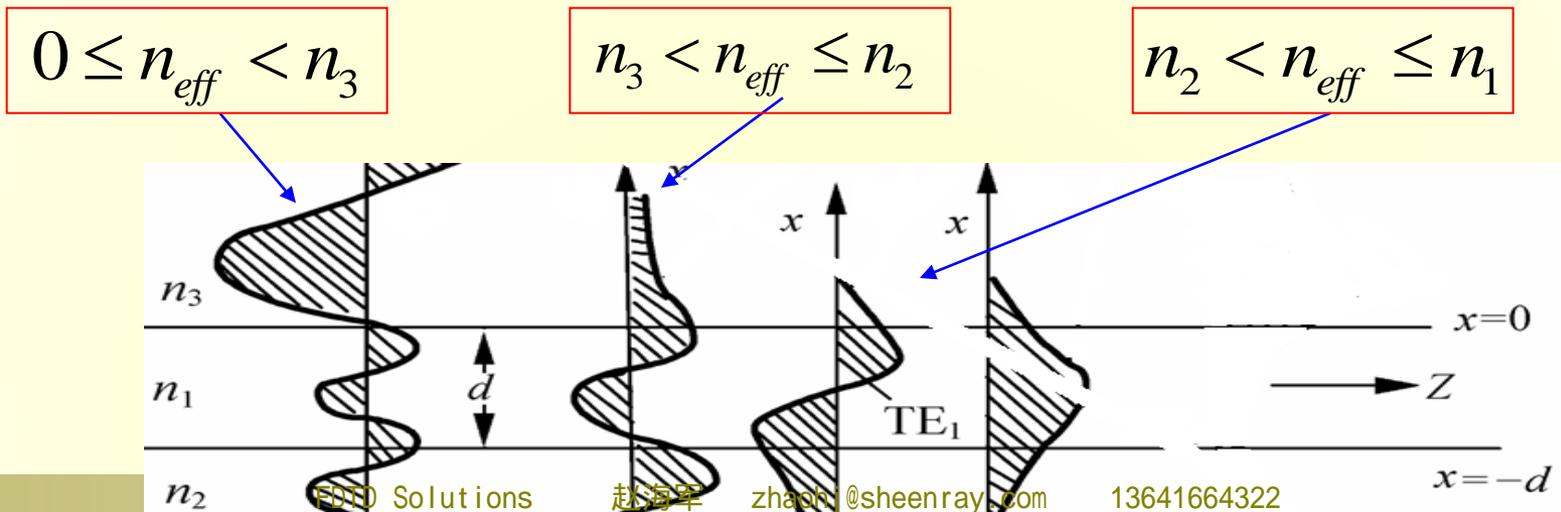


图2.2.7 平面光波导中的光线路径

(a) 包层辐射模; (b) 衬底辐射模; (c) 导模



## 2.2 平板光波导的波动方程分析

---

### 2.2.0 波导方程的推导思路

### 2.2.1 TE模的场方程及传播模式

### 2.2.2 TM模的场方程及传播模式

## 2.2.0 波导方程的推导思路

### 麦克斯韦方程组

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad 2.2.0.1$$

H-磁场强度, E-电场强度

B-磁感应强度, D-电位移矢量

$\rho$ -电荷密度, J-电流密度

### 电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad 2.2.0.2$$

### 物质方程

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \approx \mu_0 \vec{H}$$

2.2.0.3

P-媒质极化强度, M-磁化强度

$\sigma$ -媒质电导率,  $\epsilon_0$ 、 $\mu_0$ -自由空

间的介电常数和磁导率

## 波动方程的推导思路：

- 1、光波导材料为不导电的均匀、各向同性， $J=0$ ， $\rho=0$ ， $\epsilon_r$ 为常数
- 2、对公式2.2.0.1前2个式子做旋度处理，并利用后两式结果，可以得到

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad 2.2.0.5$$

式中

$$\begin{cases} c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \\ n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \sqrt{\epsilon_r} \end{cases}$$

$n$ —媒质折射率

对频率为 $\omega$ 的谐波

$$E_z(z, t) = E_0 \exp(j\omega t - j\vec{k}_0 \cdot \vec{r})$$

2.2.0.5变为

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k_0^2 n^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k_0^2 n^2 \vec{H} = 0 \end{cases} \quad 2.2.0.6$$

$$\nabla^2 U + k_0^2 n^2 U = 0 \quad 2.2.0.7$$

$U$ —电磁场的某一分量， $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 = (2\pi / \lambda_0)^2$

# 直角坐标系中

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U = -k_0^2 n^2 U \quad 2.2.0.8a$$

其通解为： $U = A \exp[j(\omega t + k_x x + k_y y + k_z z)]$  2.2.0.9

将2.2.0.9带入2.2.0.8a，得：

$$\begin{cases} \partial^2 / \partial x^2 = -k_x^2 \\ \partial^2 / \partial y^2 = -k_y^2 \\ \partial^2 / \partial z^2 = -k_z^2 \equiv -\beta^2 \end{cases} \quad 2.2.0.10 \quad \text{再带回2.2.0.8a, 得:}$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] U = -(k_0^2 n^2 - \beta^2) U \quad 2.2.0.8b$$

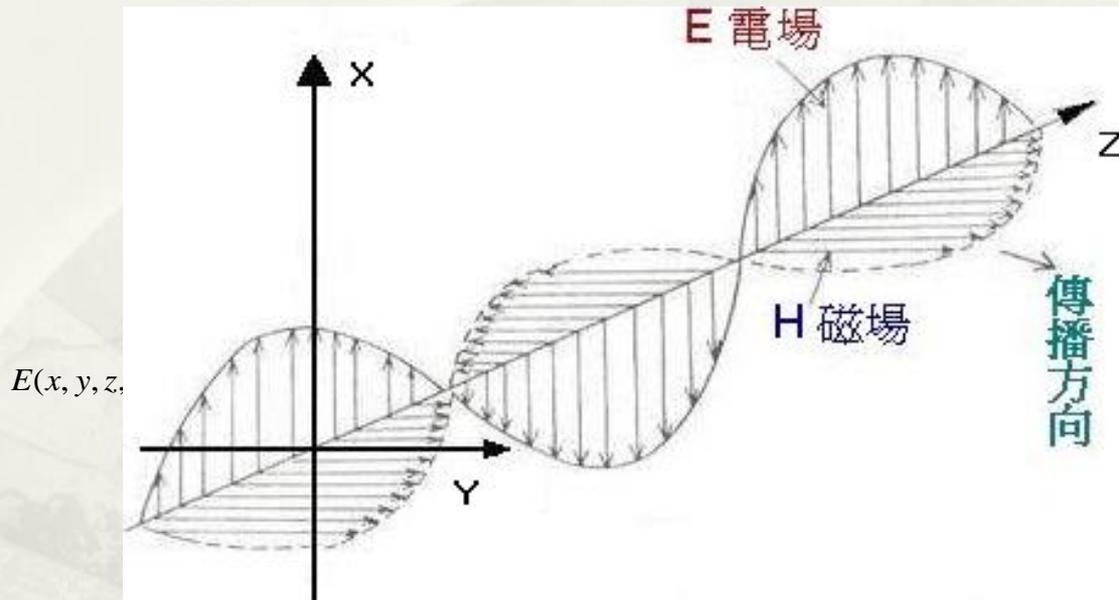
$$\text{或 } (k_x^2 + k_y^2) U = (k_0^2 n^2 - \beta^2) U \quad 2.2.0.8c$$

讨论：

$k_0 n > \beta, k_x / k_0 \text{ ??} -k_0 n < \beta, k_x / k_0 \text{ ? (电磁波特性和特性)}$

## 2.2.1 TE模的场方程及传播模式

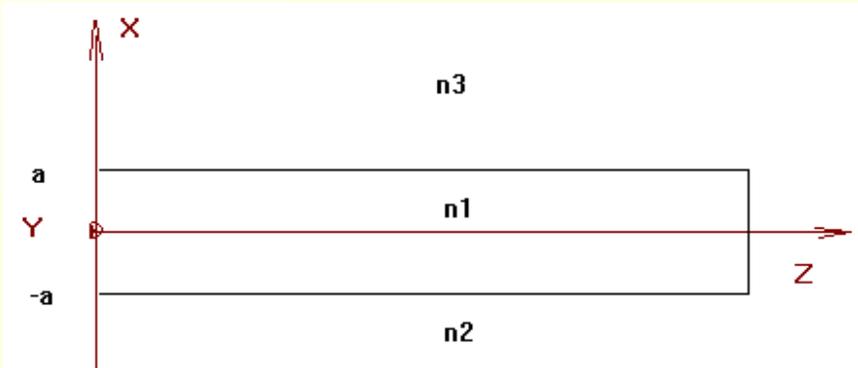
自由空间的横电磁波 (TEM) 电磁波



$$E(x, y, z, t) = E(x) \exp(j\omega t - jk_z z) = E_x \exp(j\omega t - jk_z z)$$

$$H(x, y, z, t) = H(y) \exp(j\omega t - jk_z z) = H_y \exp(j\omega t - jk_z z)$$

波导内沿Z方向传输的电磁波是 ???



$$E_x, E_y, E_z,$$

$$H_x, H_y, H_z,$$

计算发现：在如上的直角坐标系所标识的波导中沿Z方向传输的电磁波只包含三个非零的分量

$$H_x, E_y, H_z$$

我们称（只有横电场分量）具有上述分量的电磁波为**横电场模式**---TE模

将三个区域TE模的电磁波Ey带入公式2.2.0.8b，得：

$$\frac{d^2 E_y}{d^2 x} + (k_0^2 n_1^2 - \beta^2) E_y = 0 \quad 2.2.3-----芯区$$

# TE模的场方程及传播模式

$$E_y(x) = \begin{cases} E_1 \cos(k_x x - \phi) & |x| \leq a \\ E_2 \exp[a_2(x+a)] & -\infty < x < -a \\ E_3 \exp[-a_3(x-a)] & a < x < \infty \end{cases} \quad 2.2.4$$

式中

$$\begin{cases} k_x^2 + \beta^2 = n_1^2 k_0^2 & 2.2.5a \\ -a_2^2 + \beta^2 = n_2^2 k_0^2 & 2.2.5b \\ -a_3^2 + \beta^2 = n_3^2 k_0^2 & 2.2.5c \end{cases}$$

$k_x$ ---x方向的波数,  $a_2$ 、 $a_3$ ---分别为衬底层、覆盖层中电场沿X方向的衰减常数,  $k_0$ ---真空中的波数,  $\beta$ ---场量在Z方向的传播常数

注: 上式中省略了 $\exp(-j\beta z)$

利用麦克斯韦方程可得：

$$\begin{cases} H_x = -\frac{\beta}{\omega\mu_0} E_y \\ H_z = \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases}$$

利用上述分量在 $x = \pm a$ 处的连续条件，得导模的特征方程：

$$\begin{cases} k_x d = m\pi + \arctan(a_2 / k_x) + \arctan(a_3 / k_x) & 2.2.6a \\ \phi = \frac{1}{2} \arctan(a_2 / k_x) - \frac{1}{2} \arctan(a_3 / k_x) + \frac{n\pi}{2} & 2.2.6b \end{cases}$$

式中 $d = 2a$ 为波导厚度， $m=0, 1, 2, 3, \dots$ ， $n=0, 1$ 。  
 $m$ 取偶数时， $n=0$ ； $m$ 取奇数时， $n=1$

由公式2.2.6和2.2.5可以求出2.2.4解中的各个参数。  
每个 $m$ 值对应一个TE电磁波的模式----TE波的本征模

## 讨论

$$E_y(x) = \begin{cases} E_1 \cos(k_x x - \phi) & \text{-----} & |x| \leq a & k_x^2 + \beta^2 = n_1^2 k_o^2 \\ E_1 \sin(k_x x - \phi) & & & \\ E_2 \exp[a_2(x+a)] & \text{-----} & -\infty < x < -a & -a_2^2 + \beta^2 = n_2^2 k_o^2 \\ E_3 \exp[-a_3(x-a)] & \text{-----} & a < x < \infty & -a_3^2 + \beta^2 = n_3^2 k_o^2 \end{cases}$$

1、当 $a_2$ 、 $a_3$ 均为正数时， $\beta$ 也为正数，此时的电磁波是沿Z传播的行波、在X方向：波导芯处按振荡 $TE_m$ 芯外衰减的电磁波----导波模式

$a_2$ 、 $a_3$ 均为正数的条件为公式2.1.7：

$$n_2 k_o < \beta \leq n_1 k_o \quad 2.2.7$$

2、若 $a_2$ 、 $a_3$ 中的一个或都是虚数时，此时的电磁波是沿Z传播行波的同时、在X方向：也为行波----

辐射模式  $k_o n_3 < \beta \leq k_o n_2$  ---  $0 \leq \beta < k_o n_3$  2.2.8

# 平面光波导的模式及传播常数小结

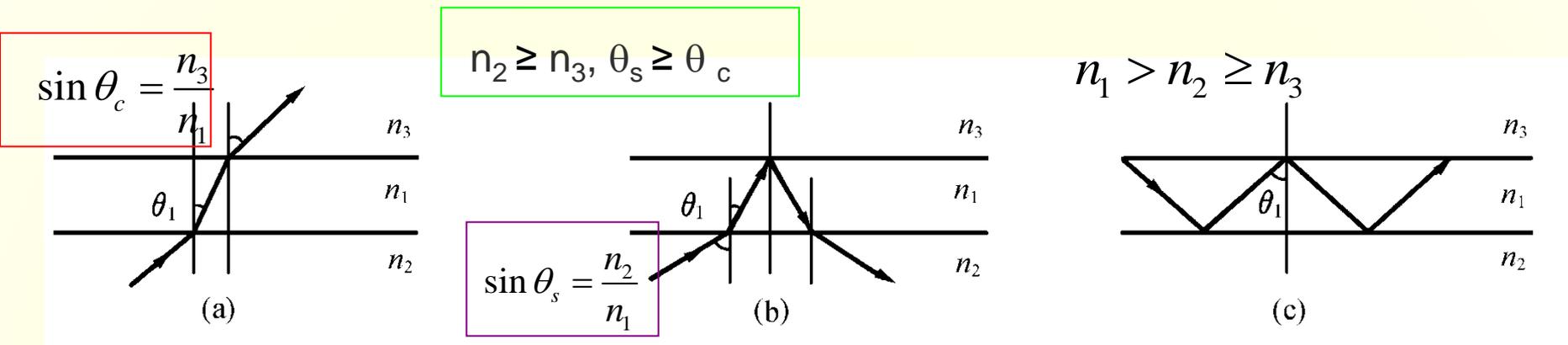
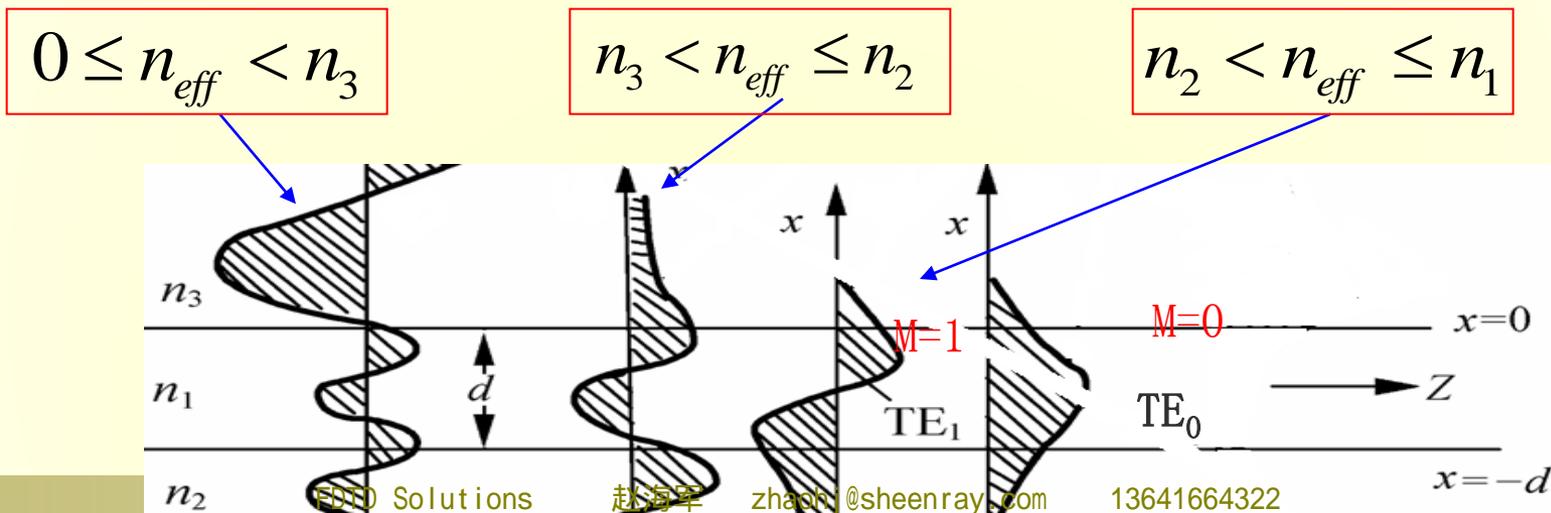


图2.2.7 平面光波导中的光线路径

(a) 包层辐射模; (b) 衬底辐射模; (c) 导模



### 3、截止波长

如果某个模式在衬底出现辐射则称该模式截止，  
由截止条件  $\beta = k_0 n_2$  带入公式2.2.5a得到 $k_x$ ，带入  
2.2.6a可得

$$k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = m\pi + \arctan \left[ \frac{\sqrt{n_2^2 - n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \right]$$

### TE<sub>m</sub>模式的截止波长

$$\lambda_c(TE_m) = \frac{2\pi d \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{m\pi + \arctan \left[ \frac{\sqrt{n_2^2 - n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \right]} \quad 2.2.9a$$

### 同理 TM<sub>n</sub>模式的截止波长

$$\lambda_c(TM_m) = \frac{2\pi d \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n\pi + \arctan \left[ \left( \frac{n_1}{n_3} \right)^2 \frac{\sqrt{n_2^2 - n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \right]} \quad 2.2.9b$$

## 4、模式数量M

由截止时的特征方程  $k_0 d \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = m\pi + \arctan \left[ \frac{\sqrt{n_2^2 - n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \right]$

和传输条件  $\lambda < \lambda_c$  ，得到TE的模式数m和TM的n

$$M = m + n + 2$$
$$= \left[ \frac{4d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right]_{\text{取整数}}$$

2. 2. 9c

## 结论：

- 1、截止波长与波导厚度成正比，与折射率差相关
- 2、模数 $m$ 、 $n$ 越高，该模式的截止波长越短
- 3、非对称波导中 $m=0$ 的 $TE_0$ 模式的截止波长最长，最容易满足传输条件，即 $TE_0$ 模是主模
- 4、对给定的波导，若工作波长缩短，则波导中传播的模式数目 $M$ 增加
- 5、对于对称平板波导的 $TE_0$ 模和 $TM_0$ 模，其截止波长均为无穷，即无论多长的波长在平板波导中都不截止

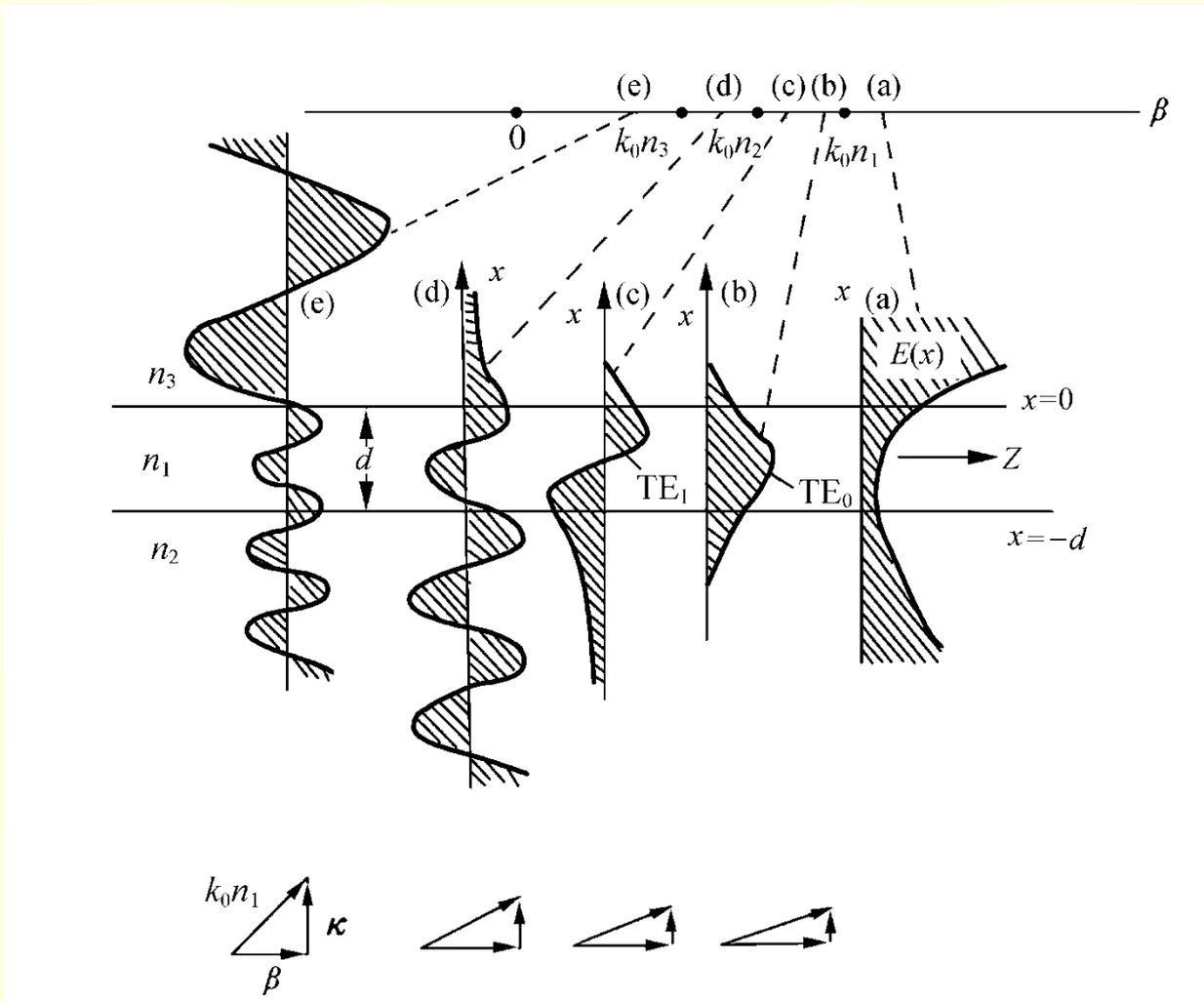


图2.2.9 平面光波导中TE模式不同传播常数 $\beta$ 值下的场分布特性

## 2.2.1 TM模的场方程及传播模式

我们称（只有横电场分量）具有  $E_x$ 、 $H_y$ 、 $E_z$  分量的电磁波为**横磁场模式---TM模**

$$H_y(x) = \begin{cases} \begin{cases} H_1 \cos(k_x x - \phi) & \text{---} & |x| \leq a \\ H_1 \sin(k_x x - \phi) & \end{cases} \\ H_2 \exp[a_2(x+a)] & \text{---} & -\infty < x < -a \\ H_3 \exp[-a_3(x-a)] & \text{---} & a < x < \infty \end{cases} \quad 2.2.10$$

$m'$ 取偶数时，取cos；  $m'$ 取奇数时，取sin

### TM模特征方程

$$\begin{cases} k_x d = m' \pi + \arctan(a_2 n_1^2 / k_x n_2^2) + \arctan(a_3 n_1^2 / k_x n_3^2) \\ \phi = \frac{1}{2} \arctan(a_2 n_1^2 / k_x n_2^2) - \frac{1}{2} \arctan(a_3 n_1^2 / k_x n_3^2) \end{cases} \quad 2.2.11$$

TM<sub>0</sub>模的截止波长  $\lambda_c(TM_0) = \frac{2\pi d \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{\arctan \left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \frac{\sqrt{n_2^2 - n_3^2}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \right]}$  2.2.12

讨论：

- 1、非对称波导， $\lambda_c(TE_0) > \lambda_c(TM_0)$ ，TE<sub>0</sub>比TM<sub>0</sub>更容易传输，主模为TE<sub>0</sub>
- 2、对称波导中，TM<sub>0</sub>、TE<sub>0</sub>同为主模

波导中传播的模式总量M

$$M = \left[ \frac{4d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \right] \quad 2.2.13$$

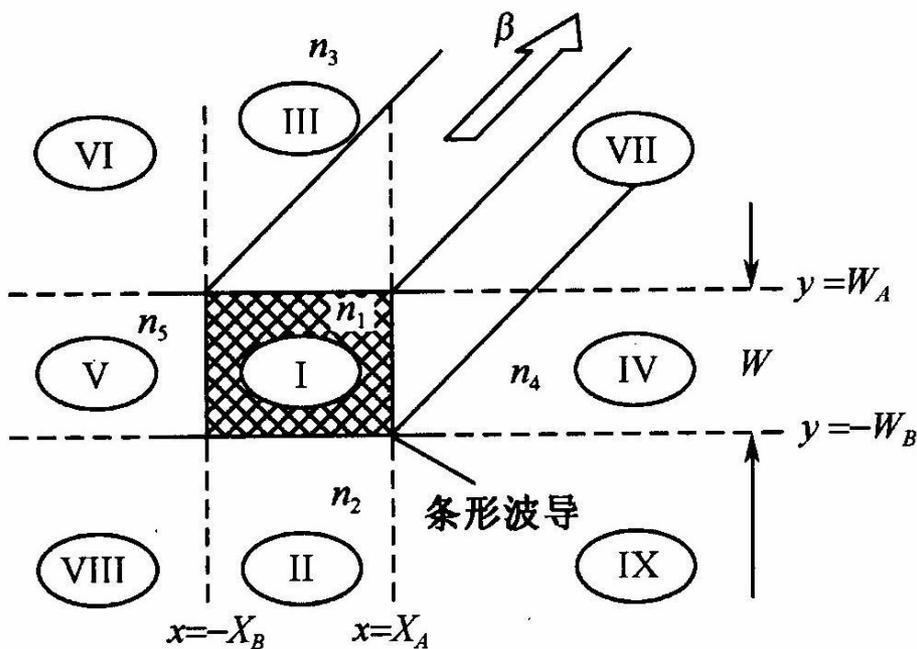
## 2.3 条形光波导的波动方程分析

9个区，每个区中都有个电磁场的6个分量

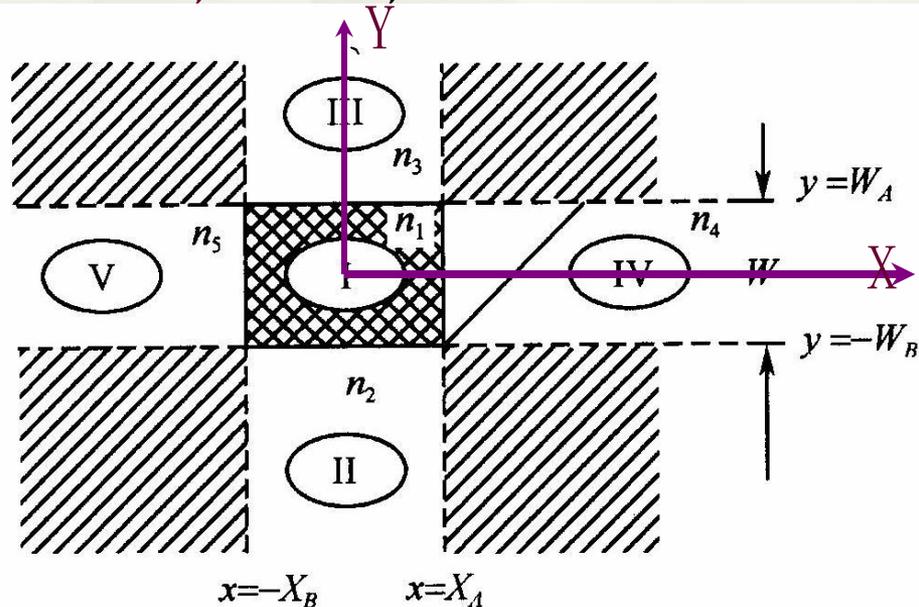
12个边界处满足连续条件  $E_x, E_y, E_z,$   
 $H_x, H_y, H_z,$

### 马卡梯里近似方法

- 1, 光功率主要集中在 I 区
  - 2, 阴影区光功率最小
  - 3, 弱波导,
- }  $\theta_i \approx 90^\circ$



(a) 严格分析



(b) 近似分析

图 2.6 条形光波导示意图

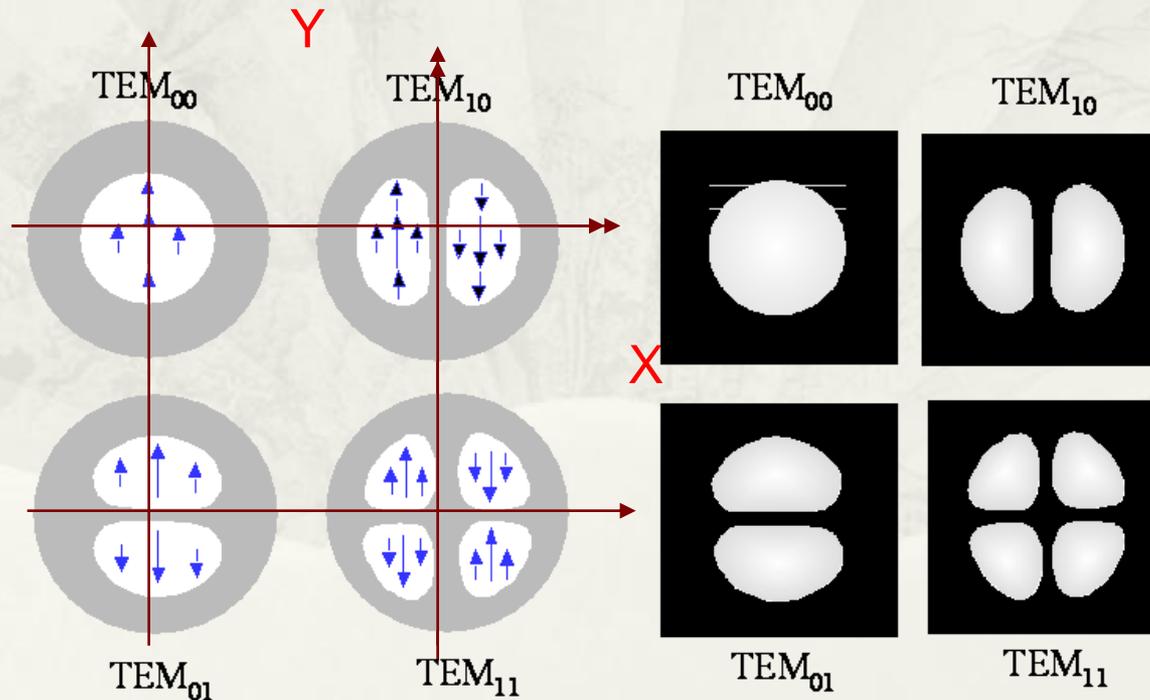
# 准TEM近似

\* 以  $E_y / H_x$  为主的横向分量-----  $E_{mn}^y$  (近似TE模)

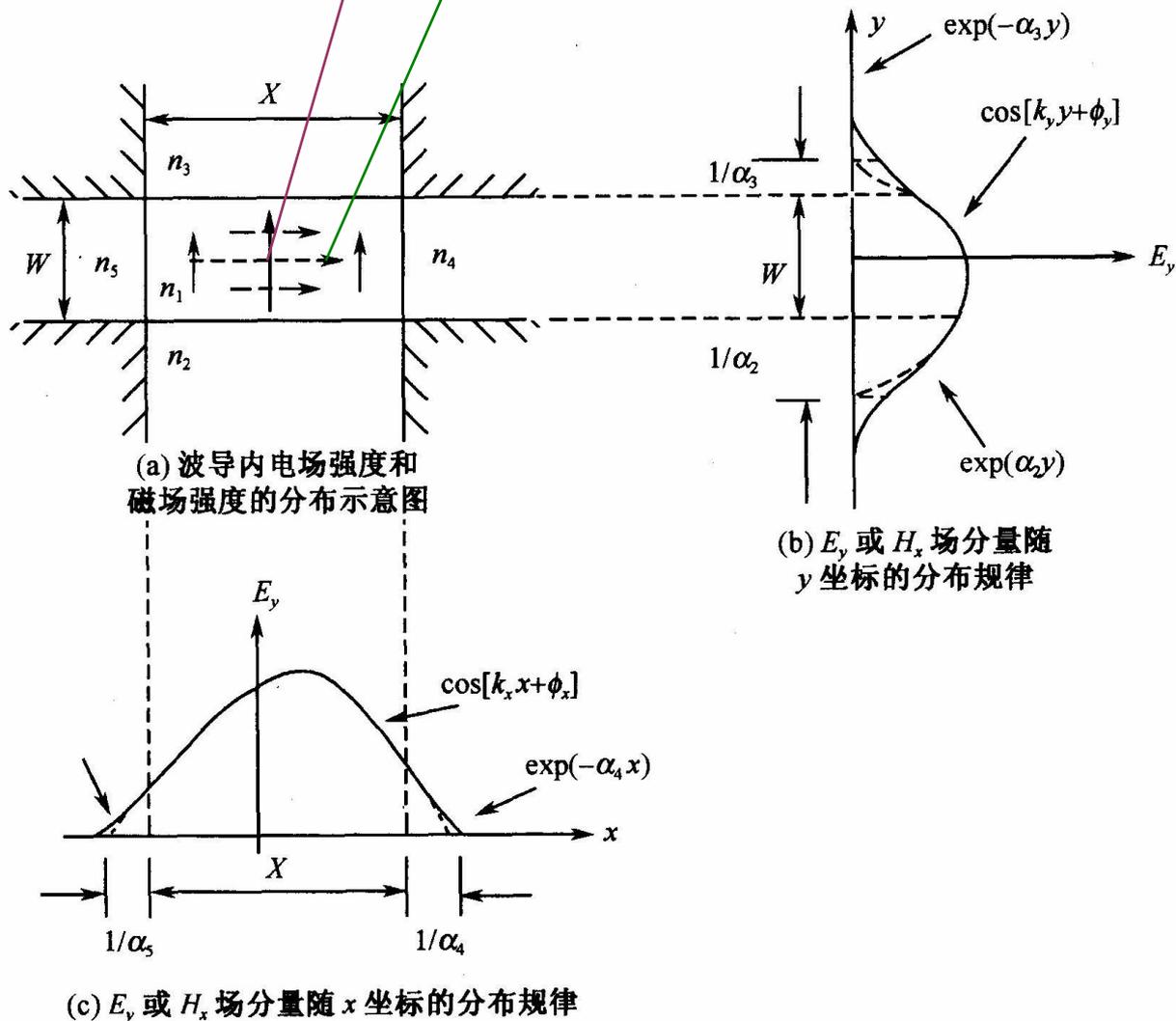
\* 以  $H_y / E_x$  为主的横向分量-----  $E_{mn}^x$  (近似TM模)

x、y 分别代表电场矢量的偏振方向；

m、n 为模式的序号---场量在 x、y 轴上出现极大值的个数



# $E_{11}^y$ $E_y$ $H_x$ 2.3.1 $E_{mn}^y$ 模



1. 对于对称波导，场量最大点在条形波导中心
2.  $X > Y$  的扁条形波导中， $E_{00}^y$  是主模

图 2.7  $E_{11}^y$  模横向场分布

## 2.3.2 $E_{mn}^x$ 模

其推导过程和结果与2.3.1类似

1. 一套m、n值对应一对  $E_{mn}^y / E_{mn}^x$  (5个区域)
2. 截止波长 (上下-Y、左右-X方向对称)
3. 条形波导中的最大模式数目

$$\lambda_c(n_4 = n_5) = \frac{2X \sqrt{n_1^2 - n_4^2}}{m-1}$$

左右-X方向对称

$$\lambda_c(n_2 = n_3) = \frac{2W \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n-1}$$

上下-Y方向对称

$$N_{\max} = 2 + [2k^2WX(n_1^2 - n_2^2)(n_1^2 - n_4^2)/\pi^2]^{1/2}$$

在  $n_2 \geq n_3$ ,  $n_4 \geq n_5$  的条件下成立

## 2.4 耦合模理论

### 2.4.1 模式耦合

### 2.4.2 平面介质光波导的耦合模微扰理论

### 2.4.3 导模之间的耦合

#### 2.4.3.1 同向耦合

#### 2.4.3.2 反向耦合

### 2.4.4 导模和辐射模的耦合

#### 2.4.4.1 耦合模方程

#### 2.4.4.2 输出耦合

#### 2.4.4.2 输入耦合

### 2.4.5 光波导的激励

#### 2.4.5.1 棱镜耦合法

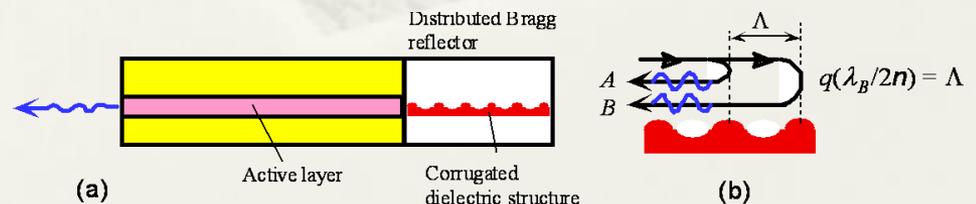
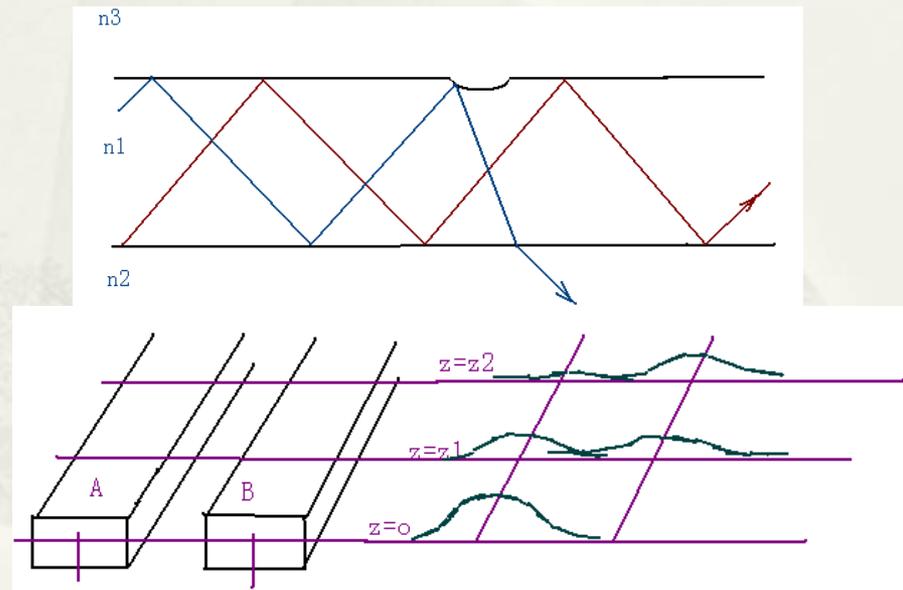
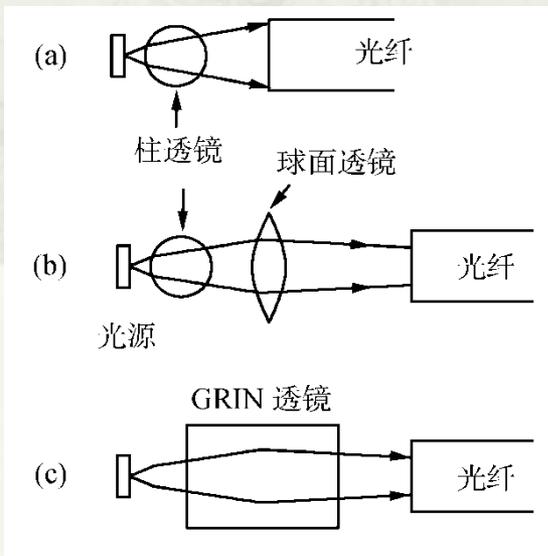
#### 2.4.5.2 光栅耦合法

#### 2.4.5.3 对接耦合

#### 2.4.5.4 其它耦合方法

# 2.4.1 模式耦合

- \* **定义：**波导中由于某种原因产生的由一种模式向另外一种模式的转换，或多个波导组成的系统中，其中一个波导传输的模式向另外波导的转移
- \* **实质：**模式的能量变换
- \* **例子：**



假设一无损沿Z轴传输的电磁波： $a \exp[j(\omega t - \beta z)]$   
 其导数为： $\frac{da}{dz} = -j\beta a$

两个发生耦合的电磁波的振幅分别为 $a_1$ 、 $a_2$ ，两者的关系有

**耦合波方程**  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_1}{dz} = -j\beta_{01}a_1 + K_{12}a_2 \\ \frac{da_2}{dz} = K_{21}a_1 - j\beta_{02}a_2 \end{array} \right. \quad 2.4.1$

$\beta_{01}$ 、 $\beta_{02}$  --- 分别是不存在耦合时两个波的波数

$K_{12}$  ( $K_{21}$ ) --- 耦合系数，表示模式2对模式1传输模场的影响  
 (模式1对模式2传输模场的影响)；实数或虚数；由耦合机制、器件结构、材料等决定

同向： $K_{12} = K_{21}^*$       反向： $K_{12} = -K_{21}^*$

## 2.4.2 平面介质光波导的耦合微扰理论 ——耦合方程公式2.4.1的推导过程

波导方程2.2.0.5改写成

$$\nabla^2 E(r,t) = \mu\epsilon_0 \frac{\partial E(r,t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial P(r,t)}{\partial t} \quad 2.4.2$$

$$P(r,t) = P_0(r,t) + P_{pert}(r,t) \quad 2.4.3$$

$$P_0(r,t) = [\epsilon(r) - \epsilon_0]E(r,t)$$

$P_{pert}(r,t)$  ——耦合波相关的微扰引起的极化强度

6个分量

$$\nabla^2 E_y - \mu\epsilon_0 \frac{\partial E(r,t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial t} [P_{pert}(r,t)]_y \quad 2.4.4$$

由于存在扰动，可将耦合波导中的光场展开为波导中所有可能模式的电磁场的线性叠加

$$E_y(r, t) = \frac{1}{2} \sum_m A_m(z) E_y^{(m)}(x) \exp[j(\omega t - \beta_m z)] + c.c \quad 2.4.0.5$$

c.c代表前一项的复共轭项，m—第m个本征值  
由公式2.4.4可得直角坐标下的分量波导方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta_m^2\right) E_y^{(m)}(r) + \omega^2 \mu \varepsilon E_y^{(m)}(r) = 0 \quad 2.4.0.6$$

把2.4.0.5带入2.4.0.6，并做“缓慢”假设  $\left| \frac{d^2 A_m}{dz^2} \right| \ll \beta_m \left| \frac{dA_m}{dz} \right|$

及各本证模场分布函数的正交性  $\int_{-\infty}^{\infty} E_y^{(m)} E_x^{(s)} dx = \frac{2\omega\mu}{\beta_m} \delta_{s,m}$

$\delta_{s,m}$ , s=m, 为1, 其余为0

$$\frac{dA_s^{(-)}}{dz} e^{j(\omega t + \beta_s z)} - \frac{dA_s^{(+)}}{dz} e^{j(\omega t - \beta_s z)} - cc = -\frac{j}{2\omega} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} [P_{pert}(r, t)]_y E_y^{(s)}(x) dx$$

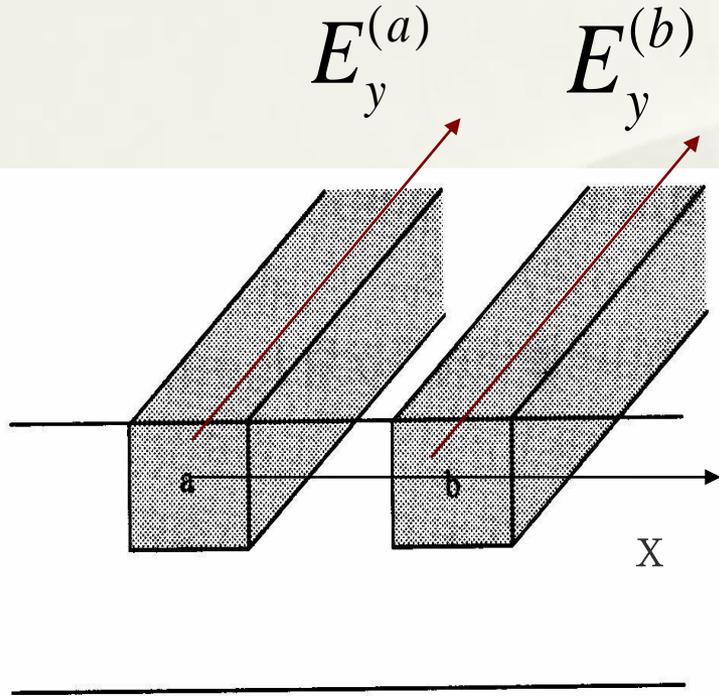
S—模式阶数, “+、-” ---波的传播方向

2.4.5

可以得到公式2.4.1及另外一种表示式

## 2.4.3 导模之间的耦合

### ---1、同向耦合



2个波导很近时波场近似为  
两个无扰动波场之和

$$E_y = A(z)E_y^{(a)}(x)\exp[-j\beta_a z] + B(z)E_y^{(b)}(x)\exp[-j\beta_b z]$$

图 2.8 双通道波导耦合器示意图

2.4.6

## 微扰极化强度

$$P_{pert} = \epsilon_0 \left\{ \begin{array}{l} A(z)E_y^{(a)}(x)[n^2(x) - n_a^2(x)]\exp[-j\beta_a z] \\ + B(z)E_y^{(b)}(x)[n^2(x) - n_b^2(x)]\exp[-j\beta_b z] \end{array} \right\} \quad 2.4.7$$

带入公式2.4.5得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dz} = -jK_{ab}B \exp[-j(\beta_b - \beta_a)z] - jM_a A \\ \frac{dB}{dz} = -jK_{ba}A \exp[-j(\beta_a - \beta_b)z] - jM_b A \end{array} \right. \quad 2.4.8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dz} = -jK_{ab}B \exp[-j(\beta_b - \beta_a)z] - jM_a A \\ \frac{dB}{dz} = -jK_{ba}A \exp[-j(\beta_a - \beta_b)z] - jM_b A \end{array} \right. \quad 2.4.9$$

$$K_{ba,ab} = \frac{\omega\epsilon_0}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [n^2(x) - n_{a,b}^2(x)]_y E_y^{(a)}(x) E_y^{(b)}(x) dx \quad 2.4.10$$

$$M_{a,b} = \frac{\omega\epsilon_0}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [n^2(x) - n_{a,b}^2(x)]_y [E_y^{(a,b)}]^2(x) dx \quad 2.4.11$$

公式意义：发生耦合后，a波的波数变为  $\beta_a + M_a$ ，b波的波数变为  $\beta_b + M_b$ ，两个波导的导模间的传播常数相位差  $\delta$ ，也叫相位失配因子，只有在  $\delta \approx 0$ ，才发生耦合模间的能量转移

$$\delta = (\beta_b + M_b) - (\beta_a + M_a) \quad 2.4.12$$

假设： $z=0$ 处只有波导b存在单模光传输，微扰发生在 $z>0$ 区域

$$B(0) = B_0 \quad A(0) = 0$$

$$\frac{d}{dz} (|A(z)|^2 + |B(z)|^2) = 0 \quad 2.4.13$$

当两个波导的尺寸、折射率、材料相同时,  $K_{ab} = K_{ba}, M_a = M_b$   
 方程2.4.1的解为:

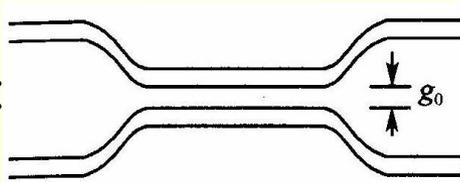
$$\left\{ \begin{array}{l} A(z) = B_0 \frac{K}{(K^2 + \delta^2)^{1/2}} e^{-j\delta z} \sin[(K^2 + \delta^2)^{1/2} z] \\ B(z) = B_0 e^{j\delta z} \left\{ \cos[(K^2 + \delta^2)^{1/2} z] - j \frac{\delta}{(K^2 + \delta^2)^{1/2}} \sin[(K^2 + \delta^2)^{1/2} z] \right\} \\ K^2 = |K_{ab}|^2 \end{array} \right. \quad 2.4.14$$

波导a,b中光波所携带的能量为:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_a(z) = P_0 \frac{K}{(K^2 + \delta^2)^{1/2}} \sin^2[(K^2 + \delta^2)^{1/2} z] \\ P_b(z) = P_0 - P_a(z) \end{array} \right. \quad 2.4.15$$

$$P_0 = |B(0)|^2 \quad \text{---为波导b的输入能量}$$

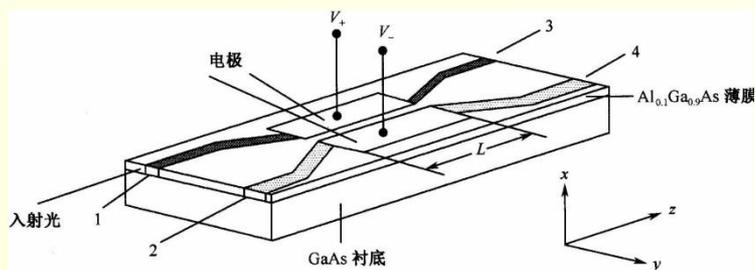
定向耦合器:



$\delta=0$ , 定向耦合器长度  $L$

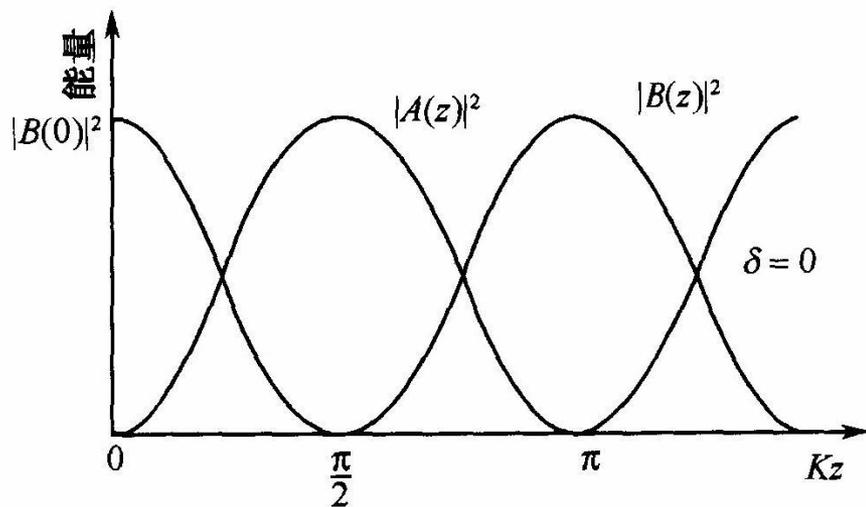
$$L = \pi / 2K$$

光开关:  $\delta=0$  变化到  $\delta \gg K$

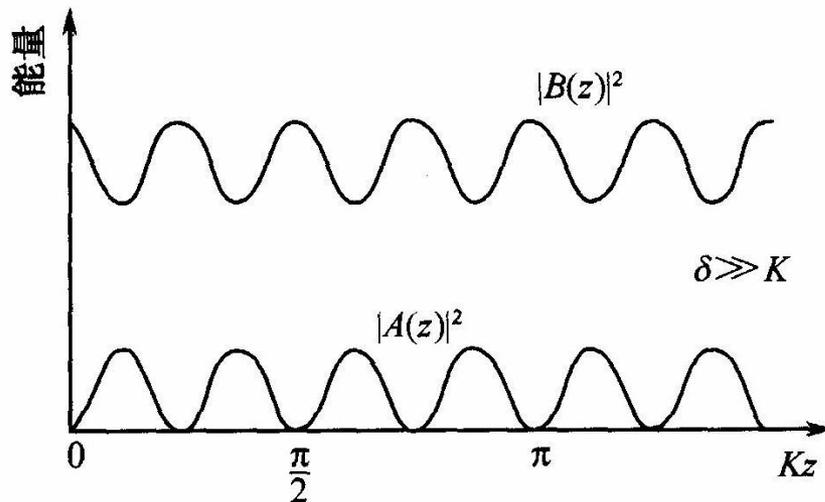


$\delta \neq 0$ , 最大能量转化效率

$$P_a(z) / P_0 = K^2 / (K^2 + \delta^2)$$



(a) 相位匹配



(b) 相位失配

图 2.9 同向耦合模式的能量变化

## 2.4.3 导模之间的耦合

### ---2、反向耦合

DBR (DFB) -LD:

具有周期 $\Lambda$ 的光栅光波导，入射波 $b$ 沿 $z$ 方向传播，在厚度变化（折射率变化）处均有沿 $-z$ 方向的反向波，设计 $\Lambda$ 等参数，使得各个反射波发生干涉——“谐振腔”

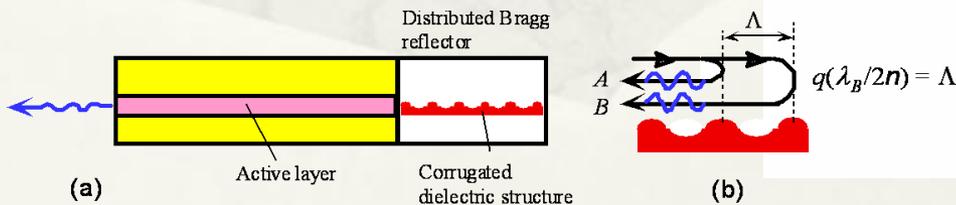
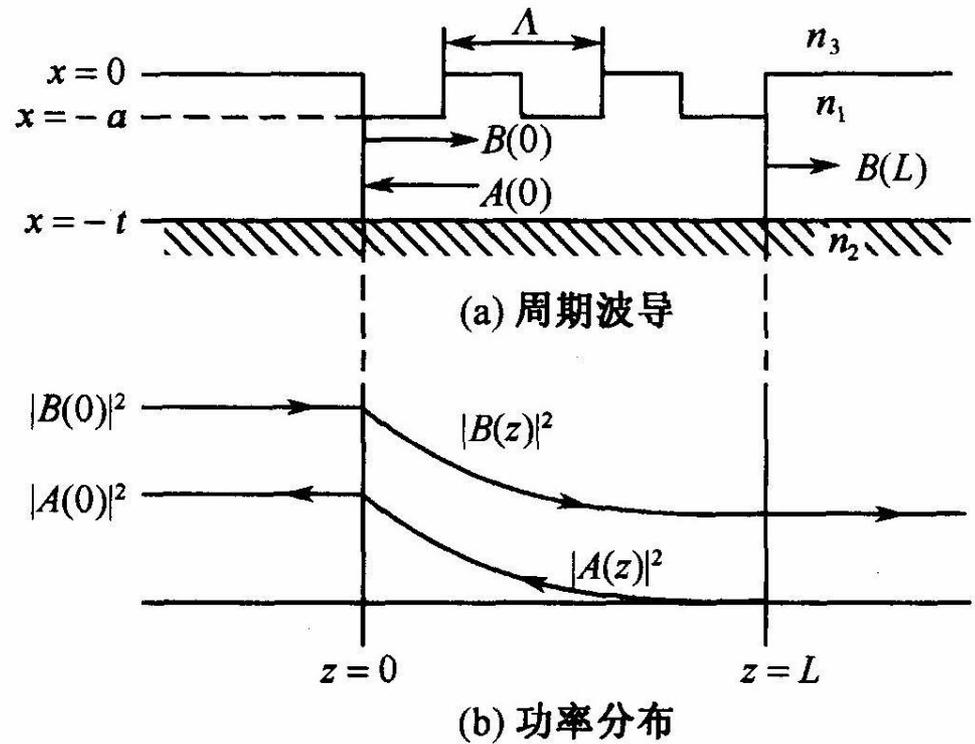


图 2.10 反向耦合

由公式2.4.5也可得到耦合方程的另外一种形式

$$\begin{cases} \frac{dA}{dz} = -jKBe^{-j2\delta z} \\ \frac{dB}{dz} = -jK^* Ae^{-j2\delta z} \end{cases} \quad 2.4.17$$

式中  $K = |K| = |K^*|, 2\delta = |\beta_b| + \left| \beta_a - l \frac{2\pi}{\Lambda} \right|, l = 1, 2, 3$

假设： $z=0$ 处只有波导b存在单模光传输，微扰发生在 $z>0$ 区域  
 $\delta=0$ 时

$$\begin{cases} B(0) = B_0 \\ A(0) = 0 \end{cases} \begin{cases} A(z) = \frac{\sinh[K(z-L)]}{\cosh KL} B_0 \\ B(z) = \frac{\cosh[K(z-L)]}{\cosh KL} B_0 \end{cases} \quad 2.4.18$$

## 2.4.4 导模和辐射模的耦合

- \* **研究的意义：**波导外的辐射模光场耦合进波导内形成导模；波导内导模输出到波导外的辐射模（连续谱）；波导内的辐射损耗

## 2.4.4.1 耦合模方程

1、辐射模的场量  $E_{rad} = \int_{-\beta_t}^{\beta_t} \alpha_{\beta} E_{\beta_i} \sigma_{\beta} d\beta$  2.4.20

$\alpha_{\beta}$ —传播常数为 $\beta$ 的辐射模的振幅系数,  $\sigma_{\beta}$ —辐射模的模密度  
+  $-\beta$ —辐射模传播常数的上下限

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\beta} = \frac{d\rho}{d\beta} \\ \rho^2 = n_2^2 k_0^2 - \beta^2 \end{array} \right. \quad n_2 \text{—衬底折射率}$$

2、假设:只有一个正向传输的 $v$ 阶导模与输入光的某个波模及辐射模之间存在有效的概率耦合;忽略掉该导模与其它导模的耦合,以及输入光波模与辐射模间的耦合

光波导的V阶导模与传播常数为 $\beta$ 的正反向传输的辐射模之间的耦合振幅方程为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_{\beta}^{(+)}}{dz} = -jK_{\beta\nu}\alpha_{\nu} \exp[j(\beta - \beta_{\nu})z] \end{array} \right. \quad 2.4.21$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_{\beta}^{(-)}}{dz} = jK_{\beta\nu}\alpha_{\nu} \exp[-j(\beta + \beta_{\nu})z] \end{array} \right. \quad 2.4.22$$

假设输入场具有单一的传播常数 $\beta_i$ ，光波导的V阶导模与输入光的波模之间的耦合方程为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_i^{(+)}}{dz} = -jK_{i\nu}\alpha_{\nu} \exp[j(\beta_i - \beta_{\nu})z] \end{array} \right. \quad 2.4.23$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_i^{(-)}}{dz} = jK_{i\nu}\alpha_{\nu} \exp[-j(\beta_i + \beta_{\nu})z] \end{array} \right. \quad 2.4.24$$

当输入光的波模与光波导的辐射模同时存在时，光波导与它们之间耦合方程为：

$$\frac{d\alpha_v^{(+)}}{dz} = -jK_{vi} \left\{ \alpha_i^{(+)} \exp[j(\beta_i - \beta_v)z] + \alpha_i^{(-)} \exp[j(\beta_v - \beta_i)z] \right\} \\ + j \int_0^{+\beta_i} \left\{ K_{v\beta} \alpha_\beta^{(+)} \exp[j(\beta_v - \beta_i)z] + K_{v\beta} \alpha_\beta^{(-)} \exp[j(\beta_v + \beta_i)z] \right\} \sigma_\beta d\beta$$

2.4.25

## 2.4.4.2 输出耦合

——没有输入光及其波模 ( $\alpha_i=0$ )

$$\text{耦合系数 } K_{\beta\nu} = \mathfrak{R}_{\beta\nu} f(z) \quad 2.4.26$$

$\mathfrak{R}_{\beta\nu}$  ——与 $z$ 无关的因子,  $f(z)$  ——耦合的扰动函数, 与波导的耦合结构有关。假设在扰动区内微扰引起 $\alpha_\nu(z)$ 的变化很小, 解2.4.21和2.4.22, 得:

$$\begin{cases} \alpha_\beta^{(+)}(L) = -j\sqrt{L}\alpha_\nu F(\beta_\nu - \beta)\mathfrak{R}_{\beta\nu} & 2.4.27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_\beta^{(-)}(0) = -j\sqrt{L}\alpha_\nu F(\beta_\nu + \beta)\mathfrak{R}_{\beta\nu} & 2.4.28 \end{cases}$$

$$F(\beta_\nu \pm \beta) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L f(z) \exp[-j(\beta_\nu \pm \beta)z] dz \quad 2.4.29$$

只有当 $f(z)$ 含有空间频率为 $\beta_\nu$ 的傅里叶分量时, 才能使 $\nu$ 阶导模向着对应的辐射模有效地转移功率

V阶导模转移辐射模的总功率为

$$\Delta P = \int_0^{\beta_t} (|\alpha_{\beta}^{(+)}(L)|^2 + |\alpha_{\beta}^{(-)}(0)|^2) \sigma_{\beta} d\beta \quad 2.4.30$$

将公式2.4.27和2.4.28带入2.4.30得：

$$a_v = \exp(-\alpha_v z) \quad 2.4.31$$

耦合输出导致的波导导模的振幅时减系数

$$\alpha_v = \frac{1}{2} \int_{-\beta_t}^{\beta_t} |\mathfrak{R}_{\beta v}|^2 |F(\beta_v - \beta)|^2 \sigma_{\beta} d\beta \quad 2.4.32$$

## 2.4.4.3 输入耦合

---有输入光及其波模 ( $\alpha_i \neq 0$ )，同时 $v$ 阶导模向辐射模输出能量

将2.4.31带入2.4.21~25

$$\frac{da_i}{dz} = -jK_{iv}a_v \exp[j(\beta_i - \beta_v)z] \quad 2.4.33$$

$$\frac{da_v}{dz} = -jK_{iv}^* a_i \exp[j(\beta_v - \beta_i)z] - \alpha_v a_v \quad 2.4.34$$

$$K_{iv} = \mathfrak{R}_{iv} f(z) = \mathfrak{R}_{iv} \sum_l f_l \exp(jl\Omega z) \quad 2.4.35$$

若 $f(z)$ 的第 $N$ 阶傅里叶分量的空间频率使 $v$ 阶导模与输入光波模的相位匹配 $^{\beta_i - \beta_v = N\Omega = 0}$ ，即： $\beta_i = \beta_v$ ，则

$$a_v(z) = -j \frac{\mathfrak{R}_{iv} f_N a_i}{\alpha_v} [1 - \exp(-\alpha_v z)] \quad 2.4.36$$

## 2.4.5 光波导的激励

- \* 光波导的激励

- \* 将光从光波导外部耦合到光波导，并形成导波模

- \* 技术方法

- \* 棱镜耦合法

- \* 光栅耦合法

- \* 棱镜-光栅耦合法

- \* 横向耦合法

## 2.4.5.1 棱镜耦合法

### 连续谱 (辐射模)

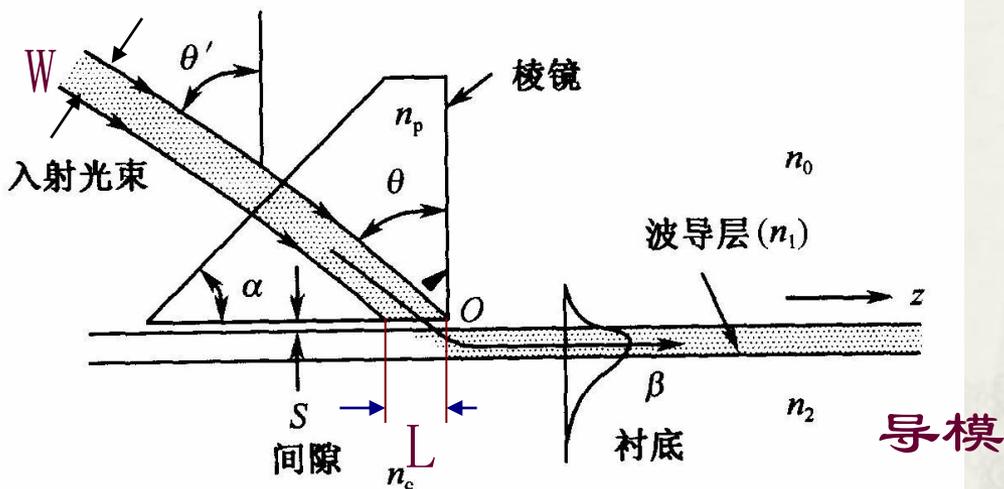


图 2.11 棱镜耦合器实现输入耦合

输入耦合

耦合效率  $\sim 80\%$

$$n_p > n_1 > n_2 > n_0$$

### 连续谱

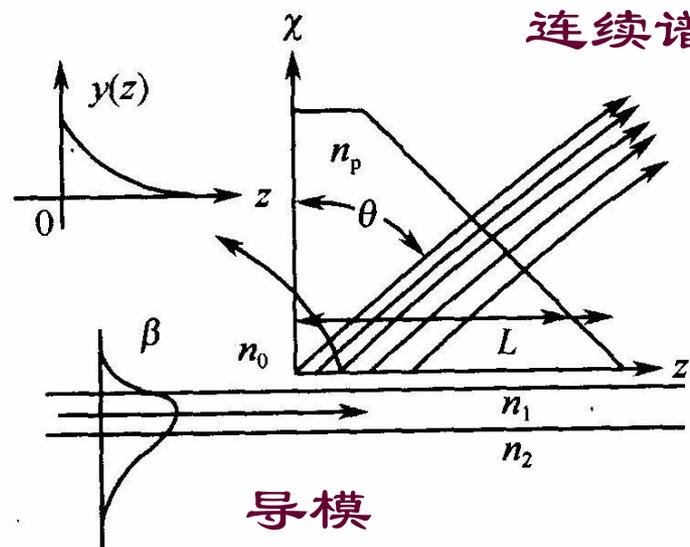


图 2.12 棱镜耦合器实现输出耦合

输出耦合, 不同模式

对应不同的出射角。

耦合效率可达100%

进入了棱镜的为入射光，其Z方向的波数

$$\beta = k_0 n_p \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_p \sin \theta \quad 2.4.37$$

以棱镜的光输入面的法线为参照时，有

$$n_0 \sin(\theta' - \alpha) = n_p \sin(\theta - \alpha) \quad 2.4.38$$

$$\theta > \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_p}\right) \quad 2.4.39$$

减少并调整棱镜和光波导的间隙S，使得波导中的某个导模的传播常数也等于2.4.37，则到达导波层的渐逝波与波导导模之间的耦合将达到相位匹配，只要耦合强度足够大就可以激励出该模式在波导中传输。为了实现能量的全部转移，

$$KL = \pi / 2 \quad 2.4.40$$

K---耦合系数，取决于折射率和S

$$KL = K \frac{W}{\cos \theta} = \pi / 2 \quad 2.4.41$$

$$K = \pi \cos \theta / 2W \quad 2.4.42$$

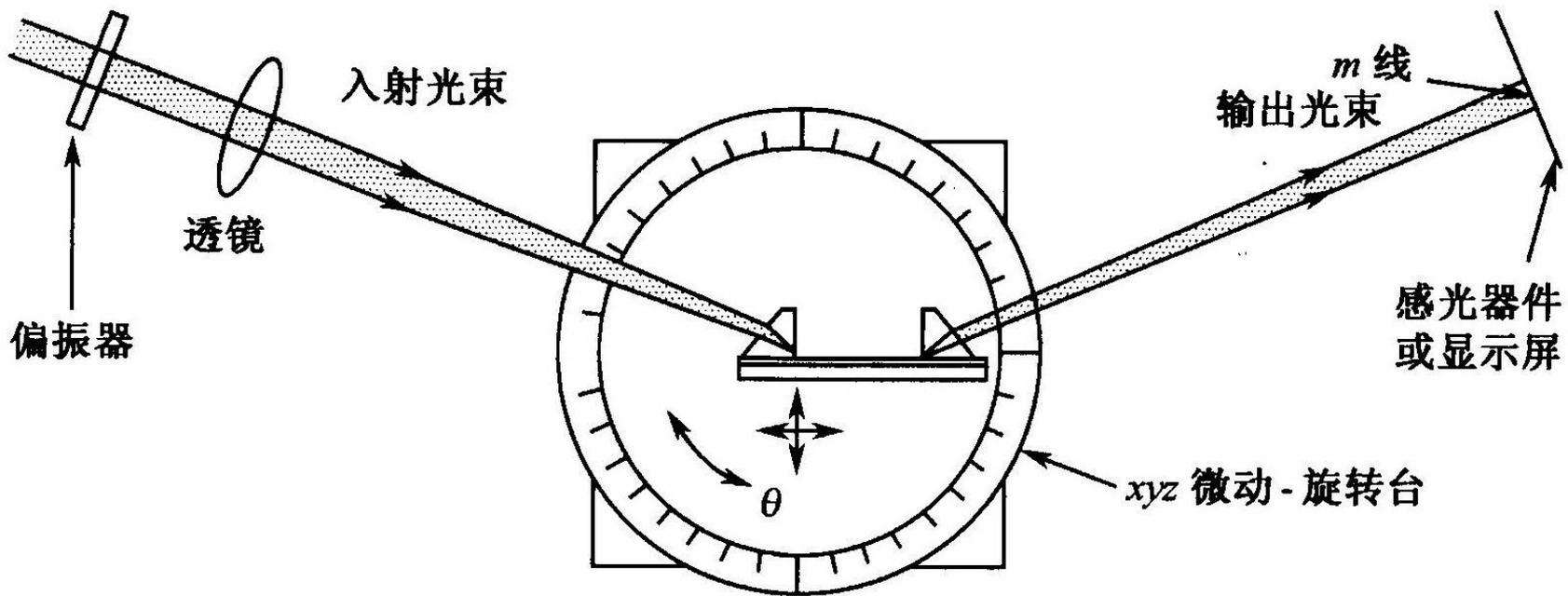
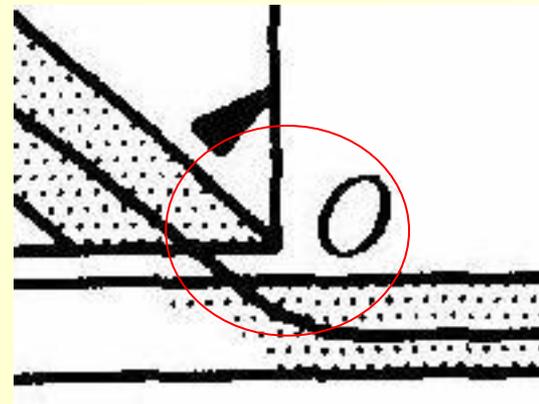


图 2.13 用棱镜耦合法激励波导光的实验装置

关键点：

- 1、精确的角度调整
- 2、光束边缘必须准确地定位在棱镜O点



# 特点

1. **最佳条件下可以得到很高效率**
2. **可以从所有导波模中任选一种进行激励**
3. **除平板波导外，也适合条形波导**
4. **入射光束的入射位置需要准确、S等需要精细调整**

## 2.4.5.2 光栅耦合法

### 光栅方程

$$d(\sin \phi + \sin \theta) = m\lambda$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

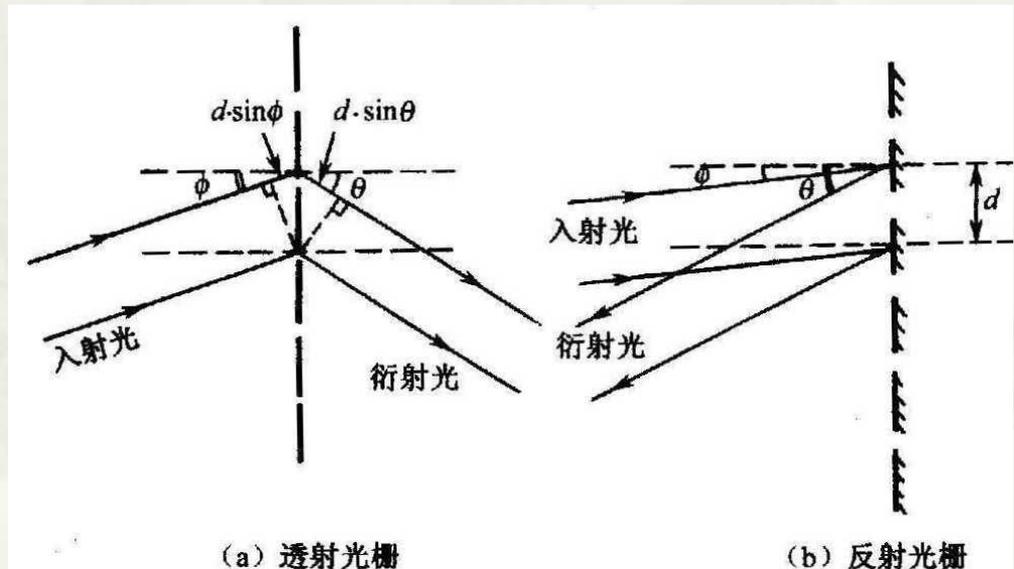


图 3-9-4 光栅的衍射

调整光栅入射角 $\theta$ 使得透射衍射角 $\theta'$  满足

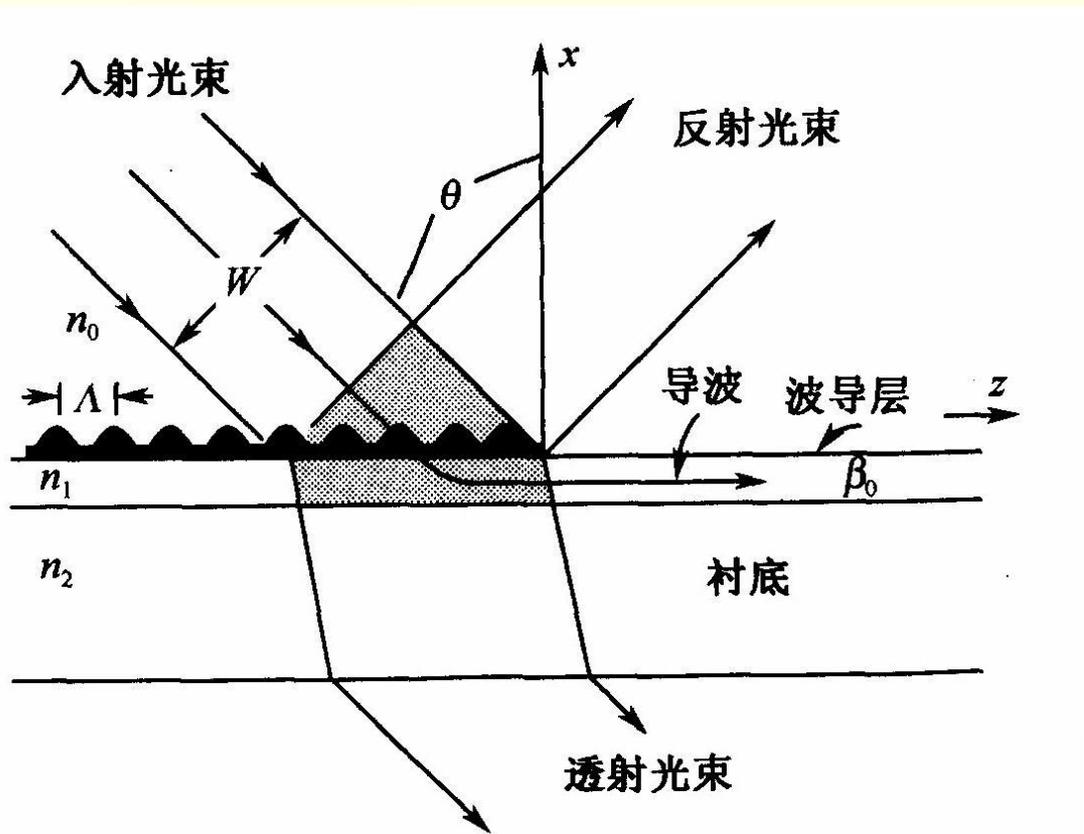


图 2.16 光栅耦合

$$\begin{aligned}\beta &= k_0 n_g \sin \theta' \\ &= \frac{2\pi}{\lambda_0} n_g \sin \theta' \\ &\approx \beta_0\end{aligned}$$

输入耦合的例子，输出类似

## 2、光栅的制作

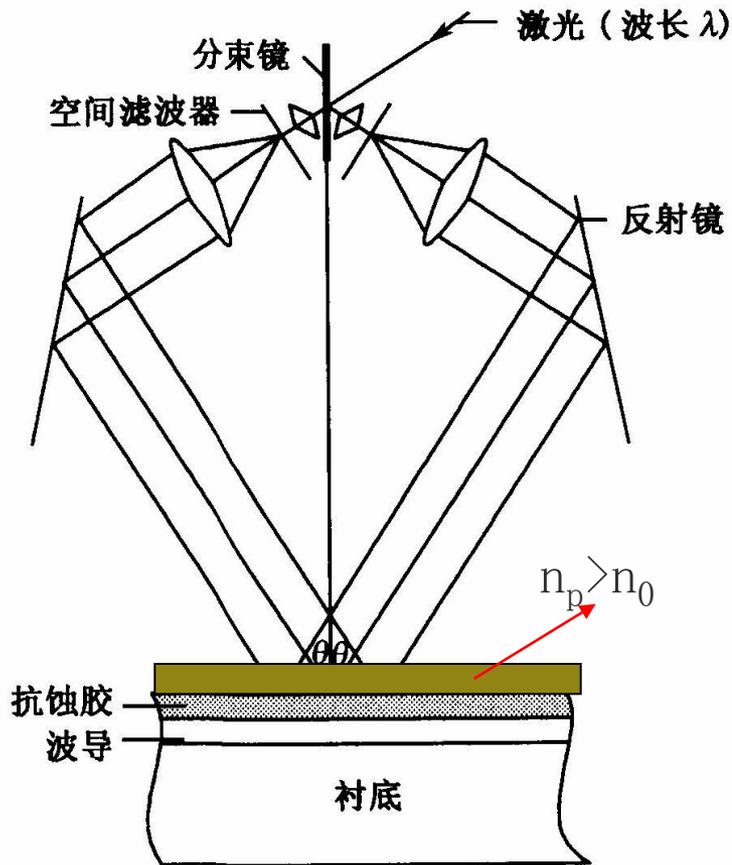


图 2.17 双光束干涉法制作光栅

### 双光束干涉

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} \quad 2.4.50$$

### 减少 $\Lambda$ 的方法

$$\Lambda = \frac{\lambda}{2n_p \sin \theta} \quad 2.4.51$$

# 特点

1. 不受光波导折射率大小的限制
2. 可以选择所有导模中的任何一种进行激励
3. 可以与波导集成
4. 入射光的入射位置无严格要求
5. 也可以在横向进行同样的激励
6. 对发散光束不能有效地耦合

# 1、光栅的耦合

周期光栅中传输的稳态简谐电磁波的波模为：

$$E(x, y, z) = F(x, y, z)e^{-\beta_0 z} \quad 2.4.43$$

$$F(x, y, z) = F(x, y, z + m\Lambda) \quad 2.4.44$$

$$F(x, y, z) = F(x, y, z + m\Lambda) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} E_v(x, y) \exp(-j \frac{2vz}{\Lambda}) \quad 2.4.45$$

$$E(x, y, z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} E_v(x, y) \exp[-j(\beta_0 + \frac{2v}{\Lambda})z] \quad 2.4.46$$

$$\beta_v = \beta_0 + \frac{v2\pi}{\Lambda} \quad (v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad 2.4.47$$

$$n_0 k_0 \sin \theta_i = n_1 k_0 \sin \theta_s = \beta_0 + \frac{v2\pi}{\Lambda} = n_{eff} k_0 + \frac{v2\pi}{\Lambda} \quad 2.4.48$$

相位匹配条件为

$$k_0 \sin \theta_i = \beta_v$$

2.4.49

# 2.4.5.3 横向耦合法

## (端射法或正向耦合法)

### \* 横向耦合法

——在与波导光行进方向垂直的光波导端面上射入与光波导波模场分布接近的光波信号

### \* 分类

- \* 直接聚焦
- \* 对接耦合

# 直接聚焦

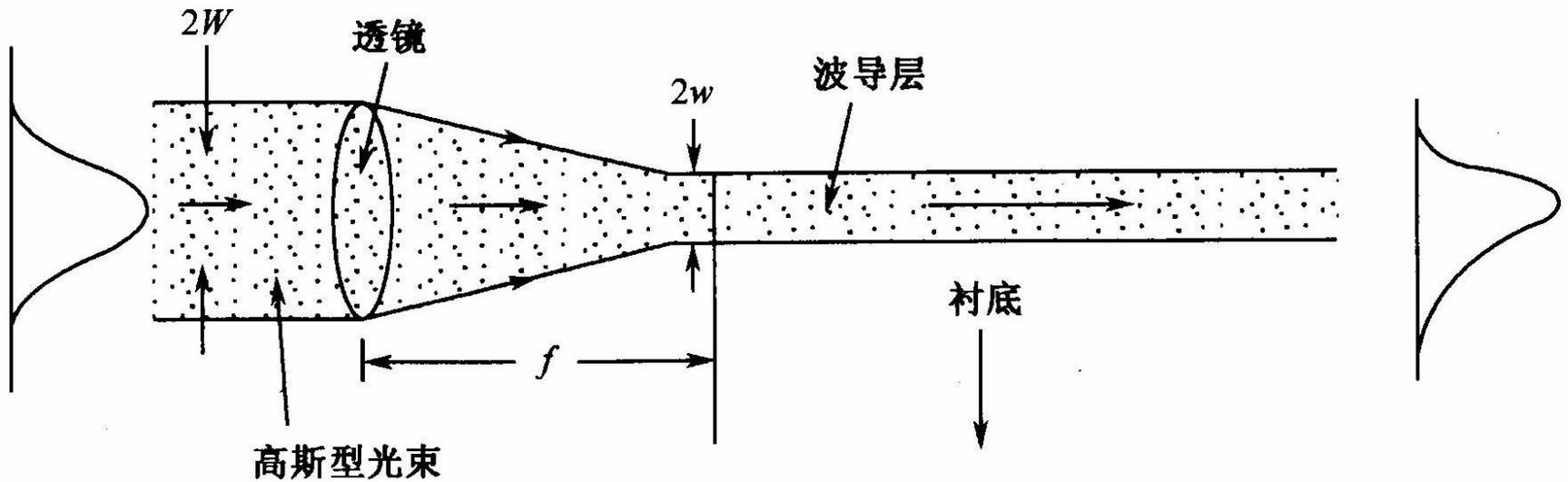


图 2.18 高斯型光束的横向耦合

## \* 高出纤光功率TO封装LD设计-- 传统球透镜:

- 优点: 工艺成熟, 用量大, 成本低

- 问题: 耦合效率 $\eta$ 低

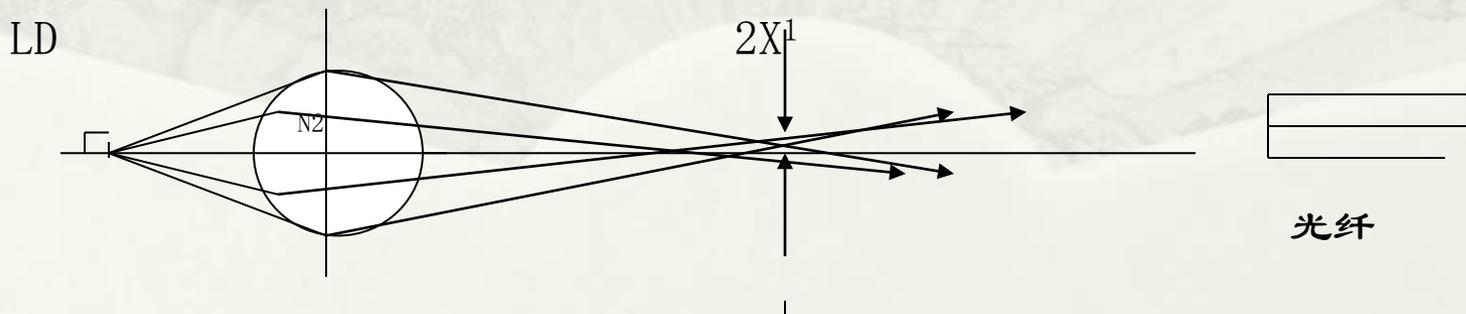
- 原因: 球透镜的球差太大

$$2X^1 = 1/2 (n_2 / (n_2 - 1)^2 - 1) \cdot f \cdot NA^3$$

对 $\phi = 1.5\text{mm}$ ,  $n_2 = 1.5$ 的球透镜

$$2X^1 \approx 1.7\text{mm} \gg \phi_f$$

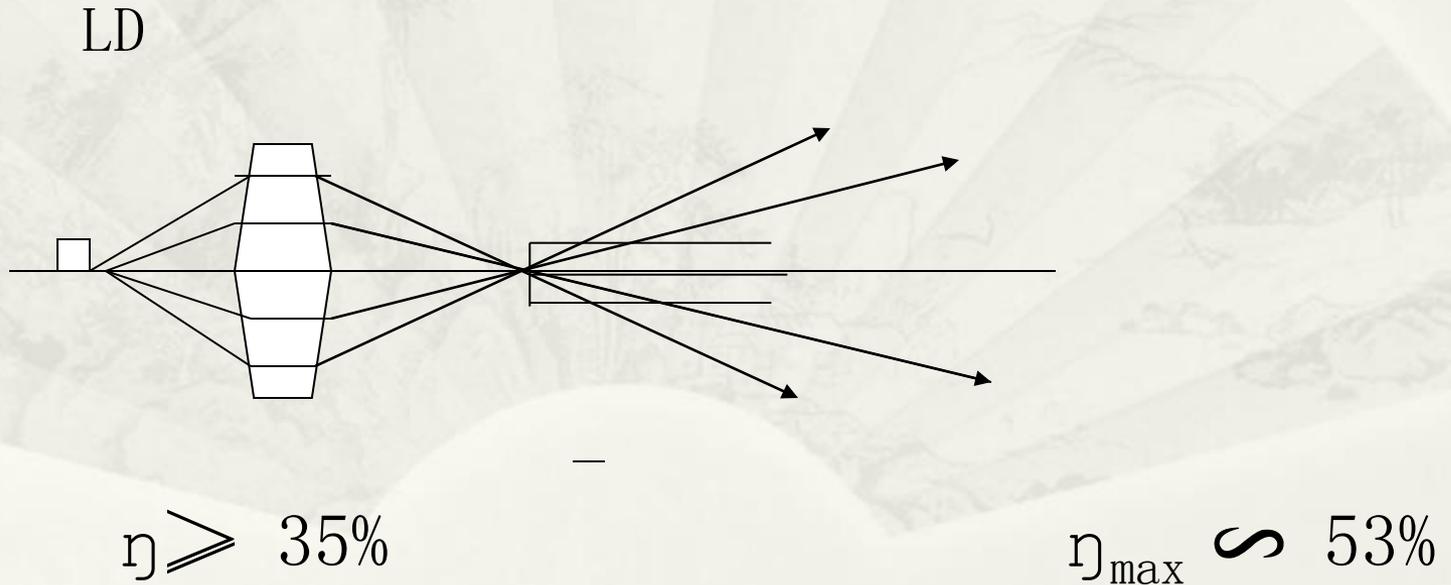
$$\eta_{\text{max}} \leq 15\% \quad P_f(\text{max}) \approx 1.5\text{mw}$$

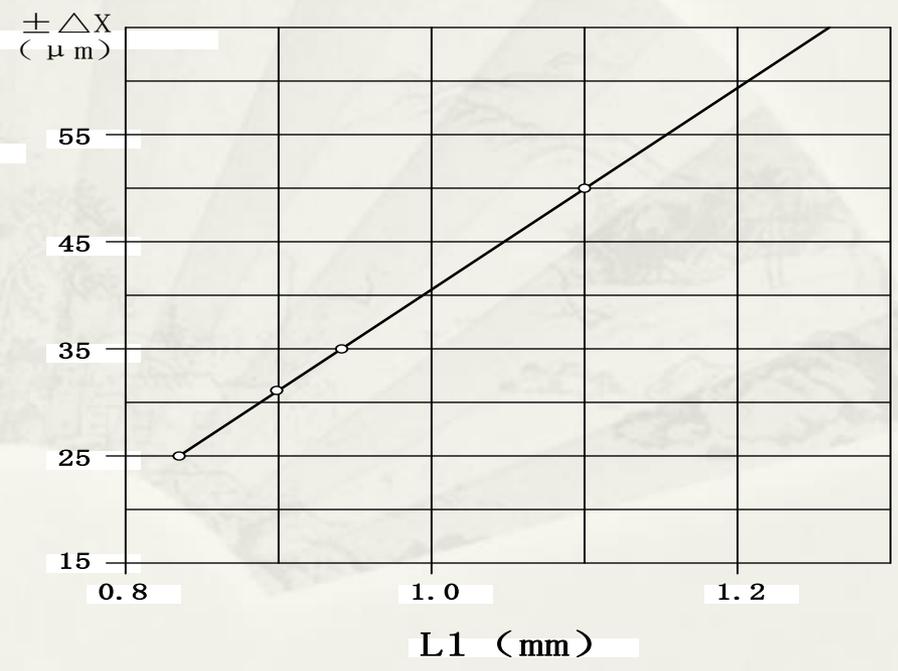
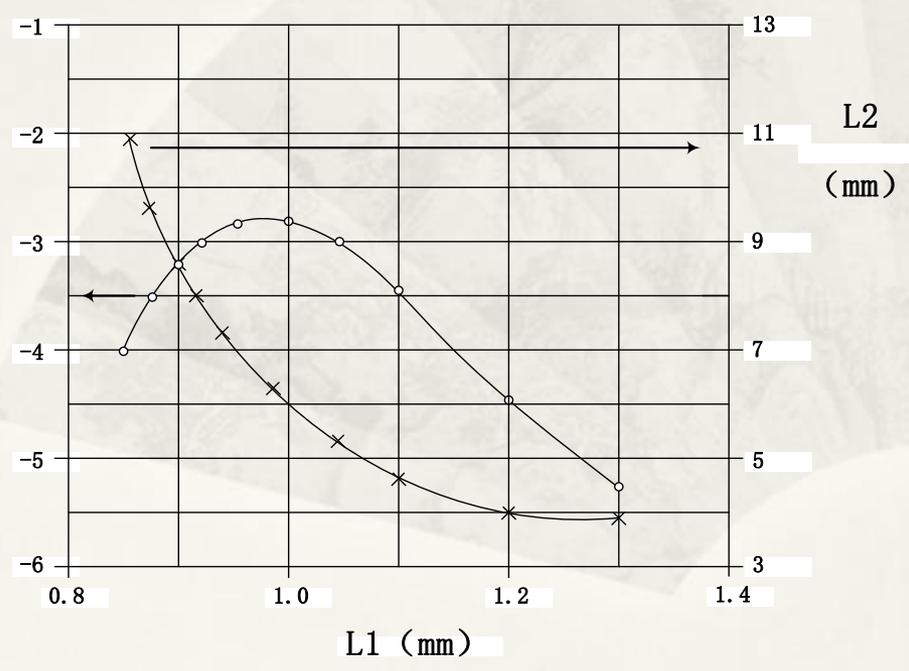
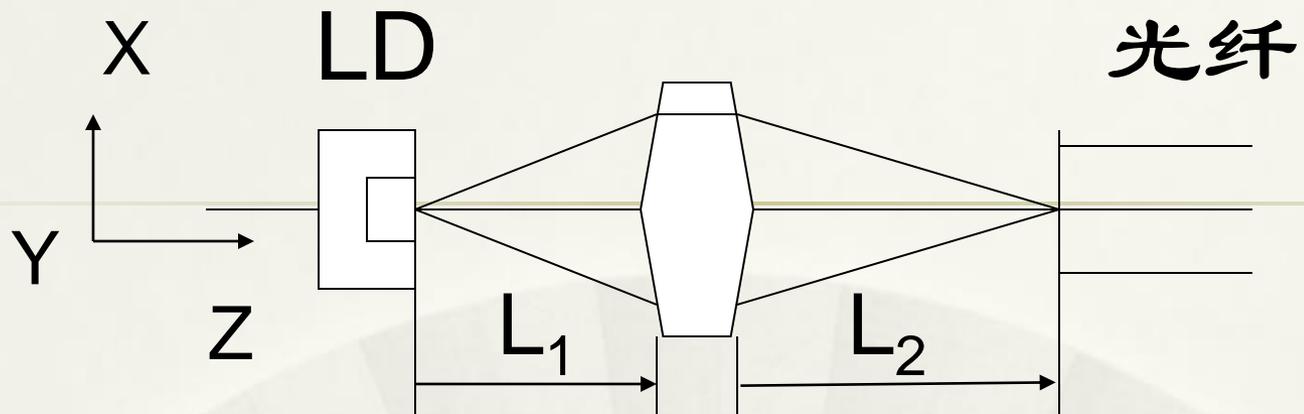


## \* 高出纤光功率T0封装LD设计--非球透镜

- 优点: 像差小,  $\eta$  高
- 问题: 工艺复杂, 价格较高

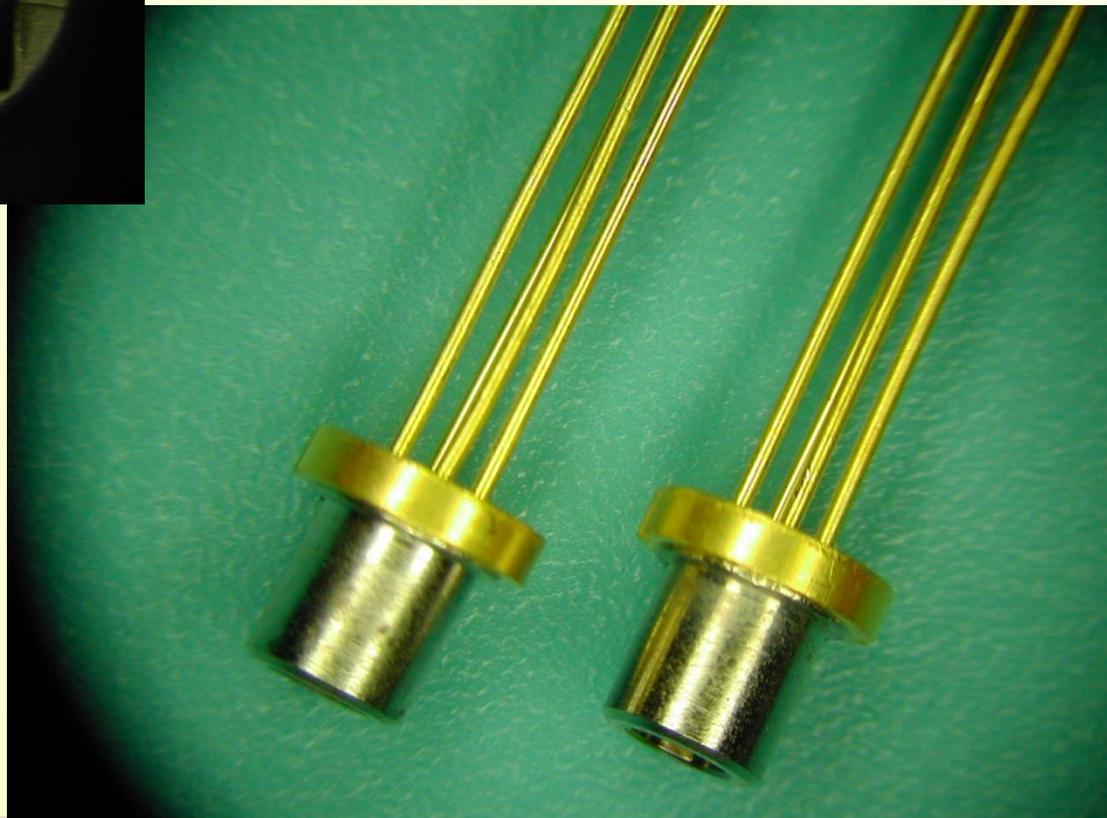
光纤





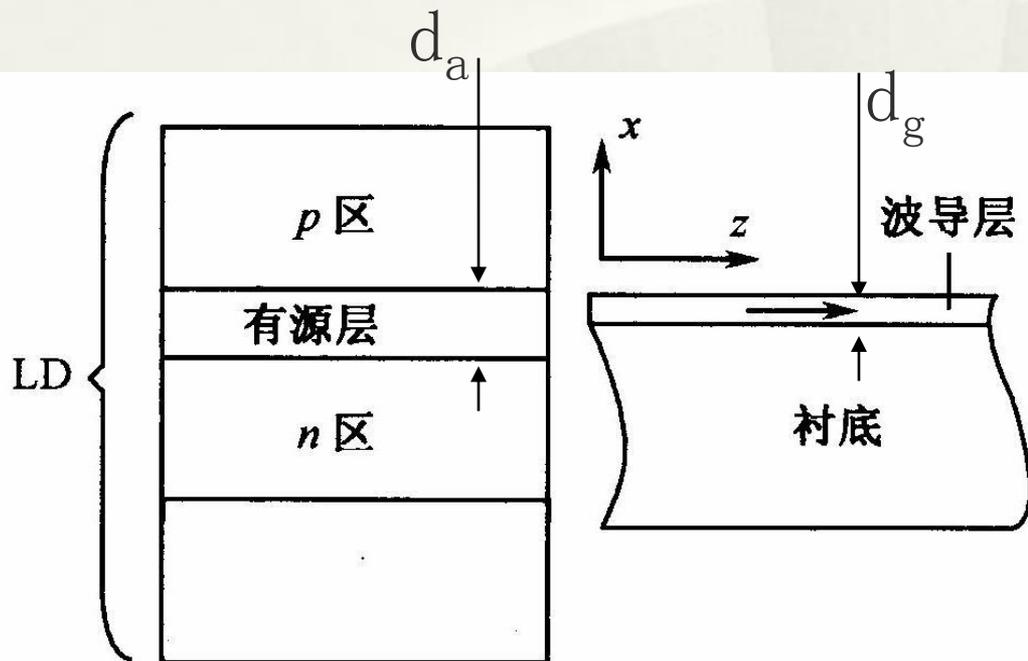
## •高出纤光功率TO封装LD设计

非球透镜---工艺实现



# LD与光波导的直接对接耦合

## ——集成光子学器件之间的耦合



$$|X| \leq \frac{(d_a - d_g)}{2}$$

$$P/P_0 = \cos^2(X/\lambda_a)$$

耦合光功率  $P$

图 2.19 激光器与平板波导的横向耦合

2.4.50

可获得68%的耦合效率

# 光纤与光波导之间的耦合

## ——无源光子器件

### 无源耦合技术

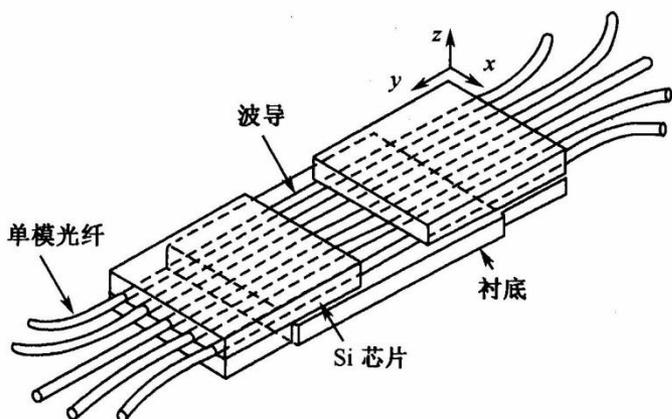


图 2.20 光纤与波导阵列耦合结构图

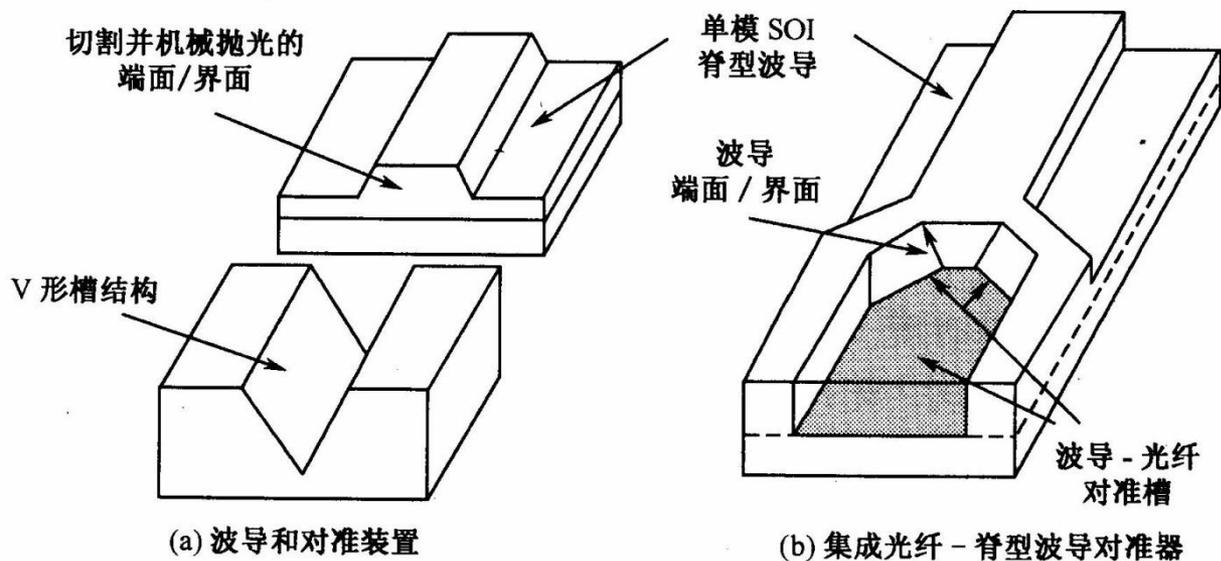


图 2.21 利用 Si V 形槽的光纤与波导的对接耦合